

Mein Sonnenuhren-Handbuch

Motivation

Vom Arbeitskreis Sonnenuhren in der Deutschen Gesellschaft für Chronometrie (DGC) wurde das "Sonnenuhren-Handbuch" herausgegeben. "Mein Sonnenuhren-Handbuch" ist vorerst eine Bearbeitung dieses Werks (Ausgabe 2006) aus meiner Sicht. Dessen Autoren sind ausschliesslich Mathematiker, weshalb eine ausreichende praktische Sicht (Physik der Sonnenuhr) auf den Gegenstand fehlt. Meine spätere ganz eigene Arbeit zum Thema wird diese Sicht bevorzugen. Der jetzt schon gewählte individuelle Titel "**Mein** Sonnenuhren-Handbuch" wird sich dann um so mehr zur Unterscheidung vom DGC-Handbuch als nötig erweisen.

Im Jahre 2008 erschien "Die Theorie der Sonnenuhr" von Jörg Meyer (Harry Deutsch Verlag, mehr als 400 Seiten), eine Arbeit, die unmissverständlich eine Ausarbeitung des theoretischen Teils des DGC-Sonnenuhren-Handbuchs ist. Im Vergleich dazu werde ich den physikalischen Teil des DGC-Handbuchs bearbeiten und ergänzen und dessen theoretischen Teil kürzen. Insgesamt wird mein Handbuch aber kürzer als das der DGC (150 Seiten) sein.

Vorgehen

Die vorläufige und unvollständige Gliederung des Inhalts folgt in seinen Grundzügen noch dem DGC-Handbuch. Die Zahl der Kapitel wird kleiner sein. Die Inhalte werden sich ändern und zu anderen Überschriften führen.

Der Einfachheit beziehe ich mich anfänglich auf von der DGC übernommene Bilder. Nötige Änderungen sind handschriftlich vorgemerkt. Manche Kapitel werden von Anfang an durch Darstellungen ersetzt, die ich in Einzel-Artikeln schon früher veröffentlichte.

Vorwort

Provisorische Gliederung

Vorwort

Kap.1 Definition der Sonnenuhr

Kap.2 Astronomische Grundlagen, Koordinatensysteme

2.1 Einleitung

2.2 Bewegung der Erde im Weltraum, heliozentrisch gesehen

2.2.1 Die wesentlichen Annahmen

2.2.2 Erdbahn und Jahreszeiten

2.2.3 Erdrotation, Stern- und Sonnentag

2.2.4 Elliptische Erdbahn, anomalistisches und tropisches Jahr

2.3 Bewegung der Erde im Weltraum, geozentrisch gesehen

(geozentrische Koordinatensysteme)

2.3.1 Die Sonnenuhr im Mittelpunkt der Himmelskugel

2.3.2 Mathematische Rechen-Grundlagen

2.3.2.1 Polar-Koordinaten

2.3.2.2 Etwas sphärische Mathematik

2.3.3 Koordinatensysteme

2.3.3.1 Koordinaten der Erdkugel

2.3.3.2 Ruhende und rotierende Koordinaten

2.3.3.3 Koordinatensysteme der ruhenden Himmels-Kugel

2.3.3.4 Koordinatensysteme der rotierenden Himmels-Kugel

2.3.3.5 Umrechnungsformeln zwischen 4 Koordinatensystemen

2.3.4 Sternzeit und lichter Tag

2.3.4.1 Sternzeit

2.3.4.2 Lichter Tag

2.4 Einige astrologische Begriffe

2.4.1 Tierkreiszeichen

2.4.2 Aszendent und Planetenstunden

2.4.3 Astrologische Häuser

2.4.4 Zusammenfassung der angegebenen Rechnungen

2.4.4.1 Tierkreiszeichen

2.4.4.2 Aszendent und Planetenstunden

2.4.4.3 Astrologische Häuser

2.5 Alphabetischer Teil

Kap.3 Chronologie und Kalender

3.1 Zeit, wahrer und mittlerer Sonnentag

3.2 Mittlere Sonne

3.3 Wahre und mittlere Ortszeit, Zeitgleichung

3.4 Zonenzeit

3.5 Andere Tageseinteilungen

3.5.1 Antike (temporale) Stunden

3.5.2 Mittelalterliche (babylonische und italische) Stunden

3.6. Der Kalender

3.7 Ungleichheit der wahren Sonnentage, Ursachen

3.7.1 Einfluss der Ekliptik-Neigung auf die Tageslänge

3.7.2 Einfluss der Ellipsenbahn auf die Tageslänge

3.7.3 Drei-Zeiger-Modell

3.8 Der Zeitausgleich, die Zeitgleichung

3.8.1 "Elementare" Berechnung der Zeitgleichung

3.8.1.1. Einleitung

3.8.1.2. Zeitgleichungs-Ursachen

3.8.1.3. Schwankung der Tageslänge in Sekunden

3.8.1.4. "Nach- und Vorgehen" der Sonnenuhr

3.8.1.5. Genauigkeit von Zeitgleichungen

3.8.1.6. Literatur

3.8.1.7. Anhänge

3.8.2 "Astronomische" Berechnung der Zeitgleichung

3.8.2.1 Vorgehen

3.8.2.2 Heliozentrische Betrachtung (Abb.2)

3.8.2.3 Übergang zum geozentrischen Weltbild (Abb.3)

3.8.2.4 Geozentrische Betrachtung (Abb.4)

3.8.2.5 Anhänge

3.8.2.6 Literatur

3.9 Alphabetischer Teil

Kap.4 Funktion der Sonnenuhr

4.1 Einteilung der Sonnenuhren

4.2 ...

Kap.1 Definition der Sonnenuhr

Mit der Definition einer Sache zu beginnen, der eine grössere Abhandlung folgt, ist problematisch, weil ja weitere Sachbegriffe auftauchen, die ebenfalls noch nicht erklärt sind. Das ist auch bei der Sonnenuhr so. Die Aufzählung neuer Begriffe kann aber auch als Inhaltsangabe zum Ganzen angesehen werden. Im späteren Ganzen werden somit alle hier im ersten (1.) Kapitel verwendeten Begriffe einzeln "abgearbeitet".

Eine erste Definition sei:

Die Sonnenuhr ist ein Instrument, das aus dem Stand der Sonne im Wesentlichen die Tageszeit (Uhrzeit) unmittelbar abzulesen oder zu bestimmen ermöglicht.

Die **Tageszeit** kann in verschiedener Weise angezeigt werden:

Wahre Ortszeit (WOZ), Mittlere Ortszeit (MOZ), Zonenzeit (MEZ), antike (temporale) und mittelalterliche (babylonische und italische) Stunden, Gebetszeiten.

Mit Hilfe der Sonne lassen sich auch **jahreszeitliche** (kalendarische) Informationen von einer entsprechend gestalteten Sonnenuhr ablesen: Datum, Solstitien, Äquinoktien, Tageslängen, Morgen- und Abendweiten.

Mit Sonnenuhren lassen sich ebenfalls **astrologische** (Tierkreiszeichen, Aszendenten, Planetenstunden, Häuser) oder reine **astronomische** (Koordinaten der Sonne in verschiedenen Koordinatensystemen) Daten gewinnen.

Alles das ist möglich, weil mit einer Sonnenuhr ein (Schatten-) Bild der Sonne auf einem Zifferblatt erzeugt wird oder eine Peilung in Richtung zur Sonne stattfindet. Je nach Gestaltung der Sonnenuhr lassen sich mit ihr bestimmte von der Himmelslage der Sonne abhängige Größen erkennen.

Das führt zur zweiten Definition, die allgemeiner und kürzer ist:

Die Sonnenuhr ist ein Instrument, das von der Himmelslage der Sonne abhängige Größen anzeigt.

Kap.2 Astronomische und mathematische Grundlagen

1. Einleitung
2. Bewegung der Erde im Weltraum, heliozentrisch gesehen
3. Bewegung der Erde im Weltraum, geozentrisch gesehen (geozentrische Koordinatensysteme)
4. Einige astrologische Begriffe
5. Alphabetischer Teil

2.1 Einleitung

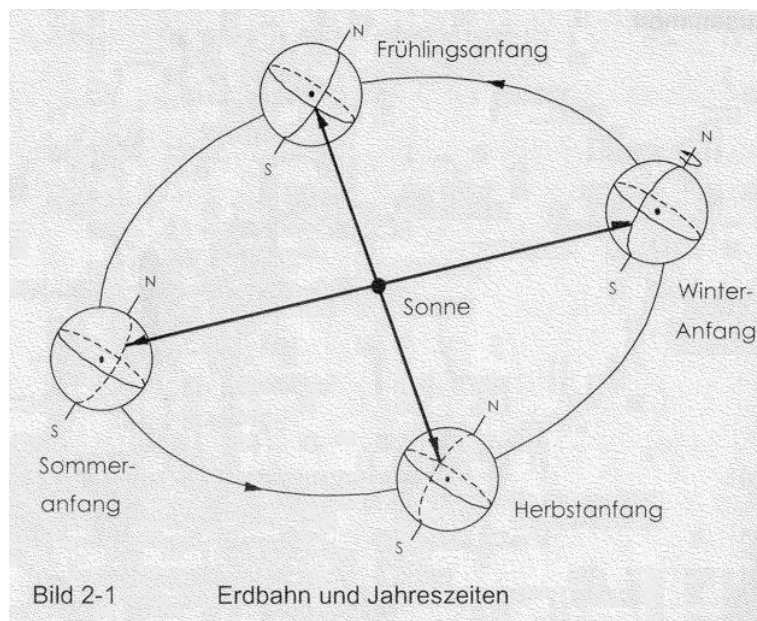
Gemäss Kapitel 1 lassen sich aus der Himmelslage der Sonne Informationen gewinnen, die in den beiden Hauptgruppen **tageszeitliche** und **jahreszeitliche** Informationen zusammenfassbar sind. Die Tageszeit ist vorwiegend eine Folge der Erd-Drehung um die eigene Achse, die Jahreszeiten werden allein vom Lauf der Erde um die Sonne bestimmt. Letzterer ist ausser für die Anzeige der Jahreszeiten auch zu messen, wenn auf Sonnenuhren als Tageszeit nicht die WOZ, sondern **antike** (temporale) oder **mittelalterliche** (babylonische oder italische) Stunden angezeigt werden sollen, oder wenn der **Zeitausgleich** (für MOZ oder MEZ) vorzunehmen ist. Rotation und Umlauf bilden eine kombinierte Bewegung, die wegen der Schräge der Rotationsachse und der elliptischen Bahnform einigermaßen komplex und folglich zu erklären ist, wobei selbstverständlich mathematische Ausdrucksmittel zu verwenden sind.

2.2 Bewegung der Erde im Weltraum, heliozentrisch gesehen

2.2.1 Die wesentlichen Annahmen

- Die Bahnkurve der Erde ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (langsame Lageänderung gegenüber umgebendem Weltraum wird bei anomalistischem Jahr berücksichtigt)
- Die Rotationsachse der Erde bildet mit der Senkrechten zur Bahnebene einen Winkel ϵ , der z.Z. etwa $23,44^\circ$ beträgt. (langsame Winkel-Änderung ist vernachlässigbar)
- Die Richtung der Erdachse ist gegenüber dem umgebenden Weltraum fix. (langsame Richtungs-Änderung wird bei tropischem Jahr berücksichtigt.)

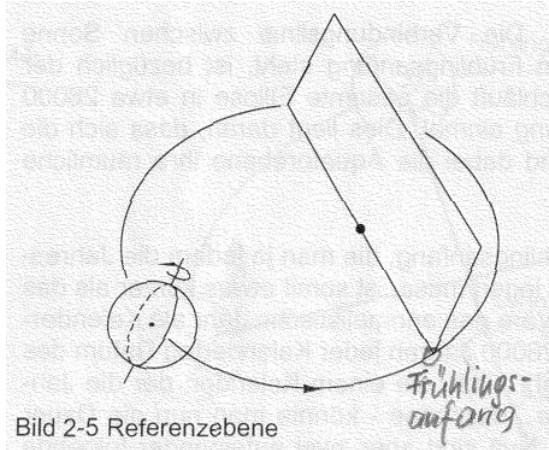
2.2.2 Erdbahn und Jahreszeiten



Von der Seite der Bahnebene, auf der der Nordpol liegt, erscheinen beide Bewegungen der Erde im Gegenuhrzeigersinn. Vier (4) Bahnpunkte bezeichnen den jeweiligen Beginn der Jahreszeiten: Sommer- bzw. Winteranfang ist es, wenn ein die Erdoberfläche senkrecht treffender Sonnenstrahl am

weitest möglichen nördlichen Punkt ($\varphi = +\varepsilon$) bzw. weitest möglichen südlichen Punkt ($\varphi = -\varepsilon$) auftrifft. Frühlings- bzw. Herbstanfang ist es, wenn die Sonne in der Ebene des Erdäquators steht. Am Frühlingsanfang durchquert die Sonne die Ebene des Äquators von Süd nach Nord, beim Herbstanfang ist es umgekehrt.

2.2.3 Erdrotation, Stern- und Sonnentag

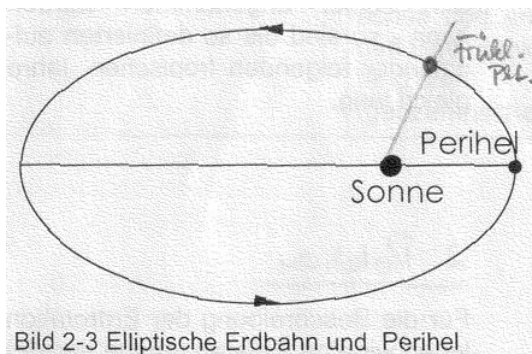


Für die Beschreibung der Erdrotation lässt sich eine Referenzebene parallel zur Erdachse durch die Sonne und den Bahnpunkt legen, an dem die Sonne bei Frühlingsanfang steht. Die Dauer einer vollen Umdrehung (360°) bezüglich der Referenzebene ist definitionsgemäss ein (1) **Sterntag**, der für die Astronomie wichtig, aber für die bürgerliche Zeitrechnung ungeeignet ist.

Weil sich die Erde gleichzeitig auch langsam auf ihrer Bahn um die Sonne fortbewegt, muss sich die Erde nämlich etwa 1° mehr als 360° um sich selbst gedreht haben, bevor der **Sonntag** beendet ist (von einem Ort der Erde aus ist die Sonne wieder im Süden zu sehen). Der Sonntag ist folglich etwas länger als der Sterntag. Nach einem Umlauf ist ein (1) Sterntag mehr als Sonnentage vergangen.

Die für die bürgerliche Zeitrechnung wichtigen Begriffe **wahrer** und **mittlerer** Sonnentag werden im nächsten Kapitel behandelt. Der mittlere Sonnentag bildet insbesondere die Einheit, in der die Dauer des **tropischen** bzw. **anomalistischen Jahres** ausgedrückt werden.

2.2.4 Elliptische Erdbahn, anomalistisches und tropisches Jahr

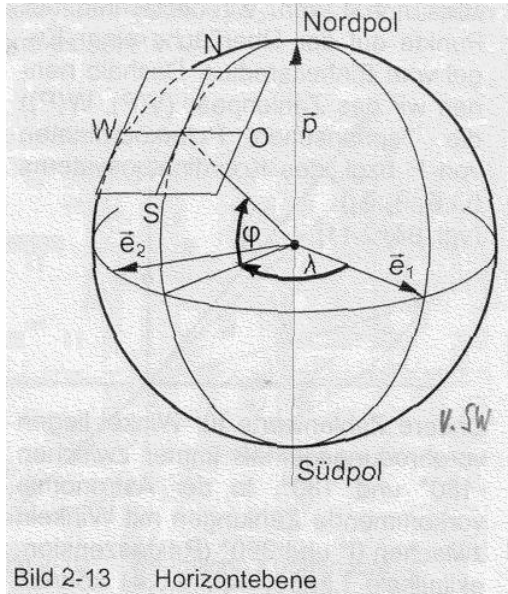


Der sonnennächste Punkt der Erdbahn heisst Perihel, den die Erde z.Z. etwa 78 Tage vor Frühlingsanfang passiert. Die Dauer eines Umlaufs von Perihel zu Perihel heisst **anomalistisches Jahr**. Es ist als Kalenderjahr nicht geeignet.

Ein Kalender muss die Jahreszeiten respektieren, die sich aber auf der Erdbahn verschieben. Der Bahnpunkt, an dem die Erde am Frühlingsanfang (astronomischer Beginn eines Jahres) steht, ist nicht fest, sondern durchläuft während etwa 21'000 Jahren die elliptische Bahn entgegen der Erdbewegung einmal (1x). Dies liegt an zwei (2) Bewegungen, die ausser der Bahnfahrt zu beachten sind, die leider

2.3.3 Koordinatensysteme

2.3.3.1 Koordinaten der Erdkugel



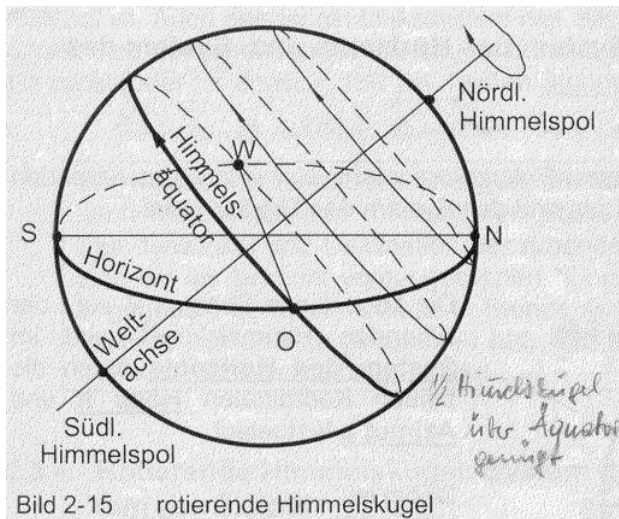
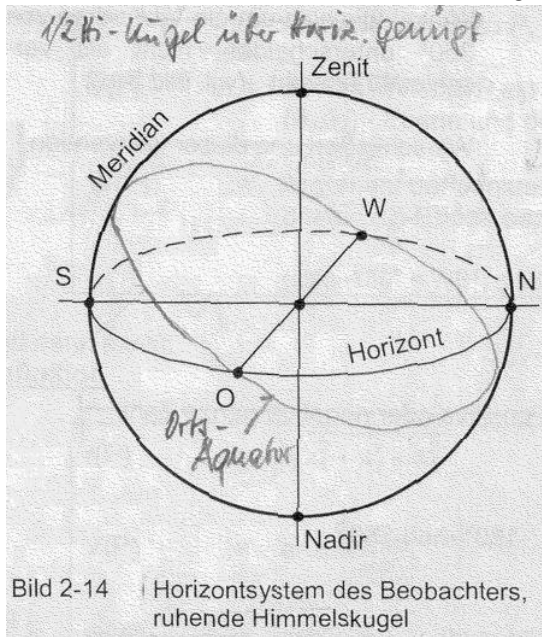
Die Erde wird vereinfachend auch als Kugel angesehen. Der Standort des Beobachters auf ihr wird ausgedrückt durch die beiden Koordinaten **geographische Breite φ** und **Länge λ** . Dabei ist $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$ und $-180^\circ < \lambda \leq +180^\circ$.

(φ, λ) sind sphärische Polarkoordinaten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems (O, e_1, e_2, p) , wobei O der Erdmittelpunkt, s_1 der Einheitsvektor zum Meridian von Greenwich und p der zum Nordpol ist.

2.3.3.2 Ruhende und rotierende Koordinatensysteme

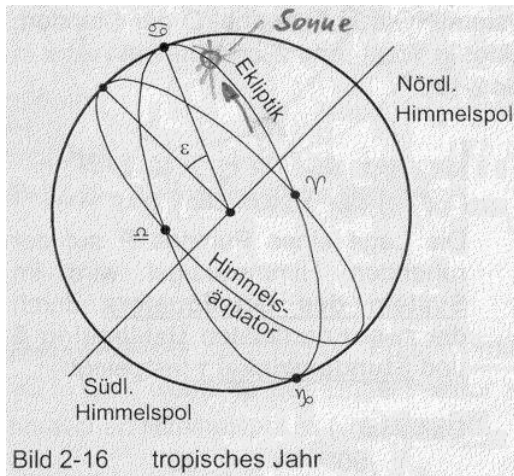
Alle Himmels-Körper sind relativ zur Erde in ständiger Bewegung. Zu dieser relativen Ortsbeschreibung der Körper werden Koordinatensysteme verwendet, die mit der Erde fest verbunden sind. Man nennt sie **ruhende Koordinatensysteme**. Die zugehörige Himmels-Sphäre ist die **ruhende Himmelskugel** (Bild 2-14). Derjenige Grosskreis dieser Kugel, der durch Südpunkt, Zenit, Nordpunkt und Nadir geht, heisst **Meridian**.

Bei längerer Beobachtung ist zu erkennen, dass sich die verschiedenen Himmelskörper auch gegeneinander bewegen. Die meisten davon –nämlich die Sterne– sind aber untereinander "fix", was als deren Befestigung auf einer –sich jetzt bewegenden– Sphäre vorstellbar ist. Der Fixsternhimmel rotiert und heisst **rotierende Himmelskugel** (Bild 2-15). Auf einem eingeschriebenen mitrotierenden Koordinatensystem (**rotierende Koordinatensysteme**) bilden sich die Bewegungen der anderen Himmelskörper, in unserem Fall die jährliche Bewegung der Sonne, relativ zu den Sternen ab. Diese Himmelskugel rotiert im Laufe eines (1) Sterntags (s.2.2.3) um die **Himmelsachse**, die an die Stelle der Erdachse getreten ist. Für den Beobachter auf der Erdoberfläche ist sie eine zur Erdachse parallele Gerade, die die beiden Himmelspole (der nördliche beim Polarstern) enthält.



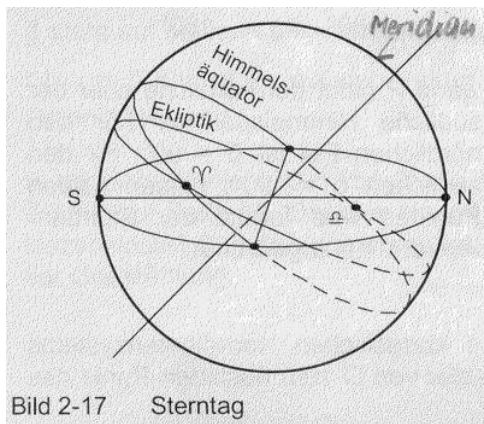
Der zur Himmelsachse senkrechte Grosskreis heisst (rotierender) **Himmelsäquator**. Er ist eine Parallele zum Erd-Äquator und schliesst mit dem Horizont den Winkel $90^\circ - \varphi$ (φ = geographische Breite, s.2.3.3.1) ein. Als identischer Kreis auf der ruhenden Himmelskugel wird er **Ortsäquator** genannt.

Die jährliche Bahnbewegung der Erde um die Sonne bildet sich folgendermassen auf der (geozentrischen) rotierenden Himmelskugel ab:



Die Sonne bewegt sich (scheinbar) auf einem Grosskreis, dessen Ebene mit dem Himmelsäquator den Winkel ϵ einschliesst, und der **Ekliptik** (Bild 2-16) heisst. Die beiden Schnittpunkte von Ekliptik und Himmelsäquator heissen Frühlings- und Herbstpunkt und bezeichnen den Ort der Sonne an der rotierenden Himmelskugel am Frühlings- und am Herbstanfang (γ und $\♄$ in Bild 2-16, s. auch 2.2.2.). Die Sonne bewegt sich auf der Ekliptik vom Frühlingspunkt aus in die nördliche Hälfte der rotierenden Himmelskugel. Bis zum Wiedererreichen des Frühlingspunkts vergeht das tropische Jahr (s. 2.2.4).

Die Zeitspanne zwischen zwei Durchgängen des Frühlingspunkts durch den sichtbaren Teil des Meridians (ruhende Himmelskugel) ist der Sterntag (s. Bild 2-17 und auch 2.2.3).



2.3.3.3 Ruhende Koordinatensysteme

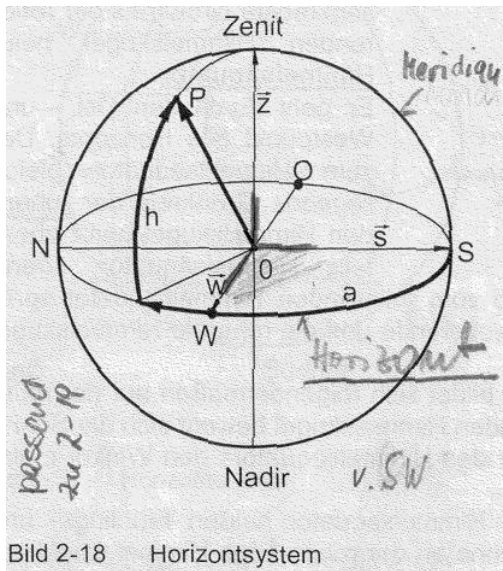


Bild 2-18 Horizontsystem

Die Lage eines Himmelspunkts P wird durch die beiden Koordinaten **Höhe h** und **Azimet a** ausgedrückt. Dabei ist $-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$ und $-180^\circ < a \leq +180^\circ$.

(h, a) sind sphärische Polarkoordinaten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems (O, s, w, z) , wobei O der Standort, s der Einheitsvektor in Süd-, w der in West- und z der in Zenitrichtung ist. Es ist ein Linkssystem. Die Einheitsvektoren s und w spannen die Horizont-Ebene auf.

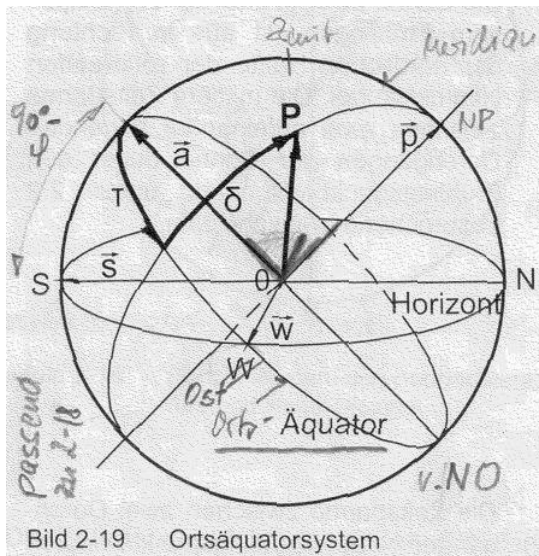


Bild 2-19 Ortsäquatorsystem

Die Lage eines Himmelspunkts P wird ausgedrückt durch die beiden Koordinaten **Deklination δ** und **Stundenwinkel τ** . Dabei ist $-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$ und $-180^\circ < \tau \leq +180^\circ$.

(δ, τ) sind sphärische Polarkoordinaten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems (O, \vec{a}, w, p) , wobei O der Standort, \vec{a} der Einheitsvektor von O zum höchsten Punkt des Ortsäquators über dem Horizont und p der Einheitsvektor zum nördlichen Himmelspol ist. Auch dies ist ein Linkssystem. Die Einheitsvektoren \vec{a} und w spannen die Äquator-Ebene auf.

Grosskreise der (ruhenden) Himmelskugel durch die Himmelspole, für deren Punkte P $\tau = \text{const}$ ist, heissen **Stundenkreise**.



sWetzel.ch

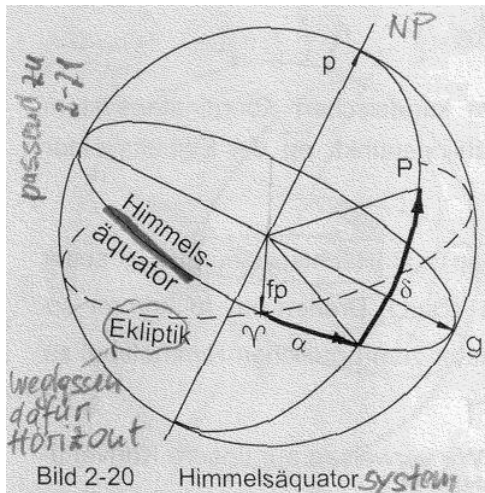
Das System des Ortsäquators geht durch Drehen um die Ost/West-Gerade gegen den sichtbaren Himmelspol um $90^\circ - \varphi$ aus dem System des Horizonts hervor.

Die "Tages-Koordinate" Stundenwinkel τ und die "Jahres-Koordinate" Deklination δ im System des Ortsäquators beschreiben den momentanen Stand der Sonne am anschaulichsten. Sie sind die Koordinaten, die eine Sonnenuhr in der Regel anzeigen soll, sind also auch die "Eingabegrößen" schlechthin für die Berechnung der Skalen von Sonnenuhren. Werden andere Koordinaten (z.B. Azimut und Höhe) angezeigt oder vorgegeben, so sind sie zweckmässigerweise in Stundenwinkel und Deklination umzuformen oder umzurechnen.

2.3.3.4 Koordinatensysteme der rotierenden Himmelskugel

Die folgenden Koordinatensysteme werden nur gebraucht, wenn der "Zeitausgleich" (s. Kapitel 3) zu behandeln ist. **Bei der Beschreibung der Sonnenuhr, die die "leicht unausgeglichene" wahre Ortszeit WOZ (s.3.3) anzeigt, kommt man ohne sie aus.**

Die Bindung an die Erde wird jetzt aufgegeben. Das geschieht aber nur insoweit, als zur Lagebestimmung eines Himmelskörpers weiterhin geozentrische Koordinatensysteme benutzt werden, die sich "nur" um die Erd- (=Himmels-) Achse drehen. Die scheinbare tägliche Rotation des Himmels um die Erde spielt bei den jetzt stattfindenden Betrachtungen keine Rolle, sie stört eher, da sie ja nach wie vor stattfindet, und somit das Bezugssystem für unsere Beobachtungen dauernd in Bewegung ist.

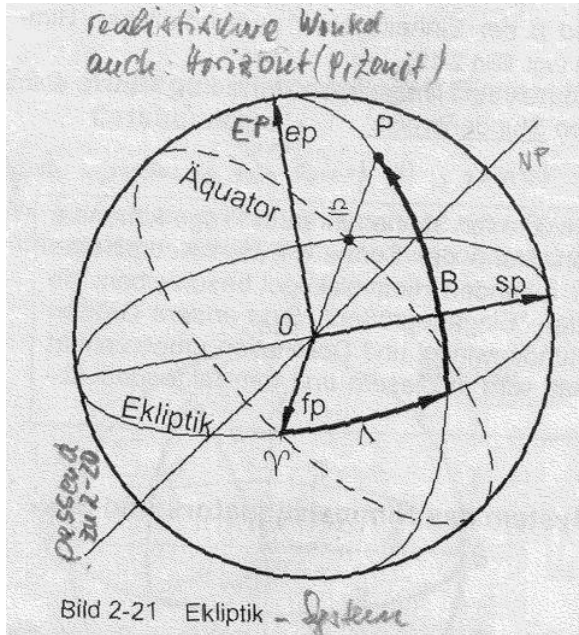


Die Lage eines Himmelspunkts P wird ausgedrückt durch die beiden Koordinaten **Deklination δ** und **Rektaszension α** . Dabei ist $-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$ und $-180^\circ < \alpha \leq +180^\circ$.

In der Astronomie wird α von 0° bis 360° gezählt und die Gradzahlen dann noch in (Rektaszensions-) Stunden umgerechnet. Wir zählen immer von negativen über Null zu positiven Winkeln und bleiben möglichst bei der Gradzählung (auch beim Stundenwinkel).

(δ, α) sind sphärische Polarkoordinaten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems (O, fp, g, p) , wobei O der Standort, fp der Einheitsvektor von O zum Frühlingspunkt und p der Einheitsvektor zum nördlichen Himmelspol ist. g steht auf beiden senkrecht und macht (O, fp, g, p) zu einem Rechtssystem (!). Die Einheitsvektoren fp und g spannen die Äquator-Ebene auf.

Weil sich dieses Koordinatensystem von dem des Ortsäquators (s.2.3.3.3) lediglich dadurch unterscheidet, dass es um den gemeinsamen Einheitsvektor p rotiert, ist eine der beiden Koordinaten, nämlich die Deklination δ , dieselbe. Ansonsten haben wir es hier anstatt mit dem Stundenwinkel τ mit der Rektaszension α zu tun, die sich wie auch die Deklination während eines Tages nur unmerklich, also in guter Näherung gar nicht ändert. Erst dem nächsten Tag werden neue Werte zugewiesen.



Die Lage eines Himmelspunkts P wird ausgedrückt durch die beiden Koordinaten **ekliptikale Breite B** und **ekliptikale Länge Λ** . Dabei ist $-90^\circ \leq B \leq +90^\circ$ und $-180^\circ < \Lambda \leq +180^\circ$.

Zu den Gepflogenheiten der Winkelzählung in der Astronomie s. Bemerkungen zur Rektaszension (2.3.3.4).

(B, Λ) sind sphärische Polarkoordinaten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems (O, fp, sp, ep) , wobei O der Standort, fp der Einheitsvektor von O zum Frühlingspunkt und ep der Einheitsvektor zum nördlichen Ekliptikpol ist. sp steht auf beiden senkrecht und macht (O, fp, sp, ep) zu einem Rechtssystem (!). Die Einheitsvektoren fp und sp spannen die Ekliptik-Ebene auf.

Das System der Ekliptik geht durch Drehen um den gemeinsamen Einheitsvektor fp um den Winkelwert $\varepsilon = 23,44^\circ$ aus dem System des Himmelsäquators hervor.

Der Ort der Sonne wird auf dem System der Ekliptik durch ihre ekliptikale Länge allein bestimmt. B ist ja für jeden Ekliptikpunkt gleich Null.



2.3.3.5 Umrechnungsformeln zwischen den vier (4) Koordinatensystemen der Himmelskugel

Die folgenden Hilfsformeln (A) und die Tabelle sind wie folgt zu benutzen:

- Man suche im Ausgangssystem (2.Spalte) die jeweiligen Koordinaten,
- besetze die Hilfsvariablen U, V und W wie angegeben (3.Spalte),
- berechne aus den Formeln (A) die Hilfszahlen x, y und z
- und aus ihnen die gesuchten Koordinaten im Zielsystem mit den dort (4.Spalte) angegebenen Formeln.

(A)

$$x = \cos U \cdot \sin V + \sin U \cdot \cos V \cdot \cos W$$

$$y = \cos V \cdot \sin W$$

$$z = \sin U \cdot \sin V - \cos U \cdot \cos V \cdot \cos W$$

	Ausgangssystem mit sphärischen Polarkoordinaten	Besetzung	Zielsystem	
Ruhende Himmelskugel	Horizont (1, h, a)	U = φ V = h W = a	Ortsäquator (1, δ, τ) δ = arcsinz τ = arg(x, y)	CD S.36
Drehwinkel zwischen den Systemen: α 90° - ψ	Ortsäquator (1, δ, τ)	U = 180° - φ V = δ W = τ	Horizont (1, h, a) h = arcsinz a = arg(x, y) Azimut	CD S.36 a
Rotierende Himmelskugel	Himmelsäquator (1, δ, α)	U = 90° - ε V = δ W = 90 - α	Ekliptik (1, B, Λ) B = arcsinz Λ = arg(y, x)	CD: S.38
Drehwinkel zwischen den Systemen: ε	Ekliptik (1, B, Λ)	U = 90° + ε V = B W = 90° - Λ	Himmelsäquator (1, δ, α) δ = arcsinz α = arg(y, x) Rektasz.	CD: S.38

Herleitung bei der DGC nur auf CD im Anhang, zweckmässigerweise gedruckt anhängen.

arg(x,y) (4.Spalte) ist der Polarwinkel eines Punkts in einem (ebenen) kartesischen x,y-System in Abhängigkeit von der x- und y-Koordinate dieses Punkts. Die Schreibweise arg(x,y) ist seit dem Aufkommen mathematisch/naturwissenschaftlicher Computersprachen gebräuchlich und steht in den meisten von ihnen explizit als Funktion zur Verfügung.

2.3.4 Sternzeit und lichter Tag

Wir kehren zu den beiden Äquatorsystemen zurück, um noch zwei Dinge zu besprechen.

2.3.4.1 Sternzeit

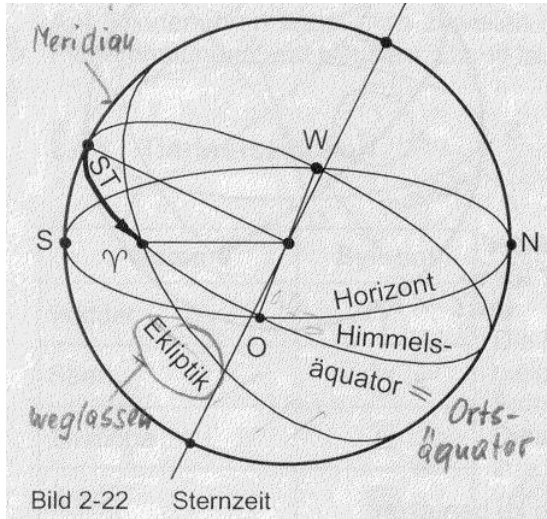
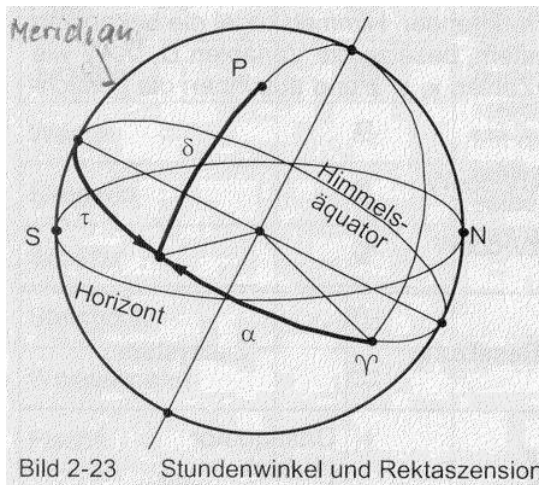


Bild 2-22, System des Ortsäquators

Der Stundenwinkel des Frühlingspunkts wird als **Sternzeit ST** bezeichnet. Dabei ist $-180^\circ < ST \leq +180^\circ$.

Das ist eine Zeiteinteilung des Sterntags (s.2.2.3) in 24 Stunden (Astronomie), wobei der Zählbeginn einmal (1x) im (tropischen) Jahr durch den Sonnentag (vorwärts) läuft.

Wir geben die Sternzeit als Winkel an, rechnen nicht in Stunden um. Zu den Gepflogenheiten der Winkelzählung in der Astronomie s. Bemerkungen zur Rektaszension (2.3.3.4).



Aus Bild 2-23 (enthält sowohl System des Orts- als auch System des Himmelsäquators) kann man die Beziehung zwischen Stundenwinkel τ und Rektaszension α eines Himmelspunkts P und der Sternzeit ST entnehmen. Man achte dabei auf die unterschiedlichen Zählrichtungen der Winkel.

Die Beziehung lautet: $ST = \tau + \alpha$ bzw. $\tau = ST - \alpha$.

2.3.4.2 Lichter Tag

Bild 2-24, System des Ortsäquators

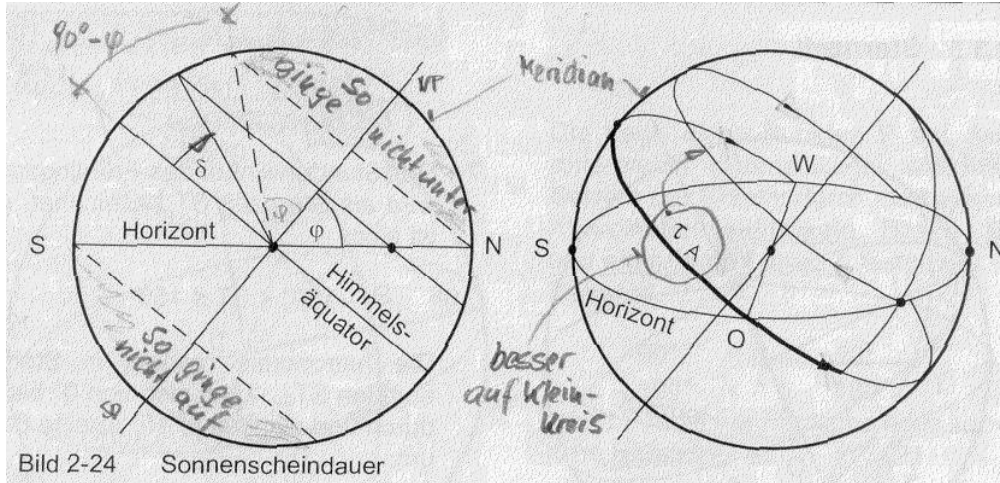


Bild 2-24 Sonnenscheindauer

Bisher war vom Sonnentag (s.2.2.3) die Rede, ohne darauf einzugehen, ob sich die Sonne überhaupt über dem Horizont befindet, damit sie eine Sonnenuhr "antreiben" kann. Der entsprechend Tagesabschnitt heisst **lichter Tag** und ist ein Teil des vollen Tageskreises der Sonne (Sonnen- oder **Volltag**). Im Bild ist zu sehen, dass der lichte Tag- und der Nachtbogen bei $\delta = 0$ mit je 180° gleich lang sind. Diese beiden Jahresdaten heissen nicht nur Frühlings- bzw. Herbstanfang sondern auch **Tag/Nacht-Gleichen** bzw. **Äquinoktien**. Bei $\delta = \pm \epsilon$ ist der lichte Teil des (Klein-) Tageskreises am grössten (Sommeranfang) bzw. am kleinsten (Winteranfang). Da die Deklinations-Änderung $\Delta\delta$ bei diesen Daten das Vorzeichen wechselt, also momentan Null ist, spricht man von **Solstitionen** (Sonnen-Stillständen).

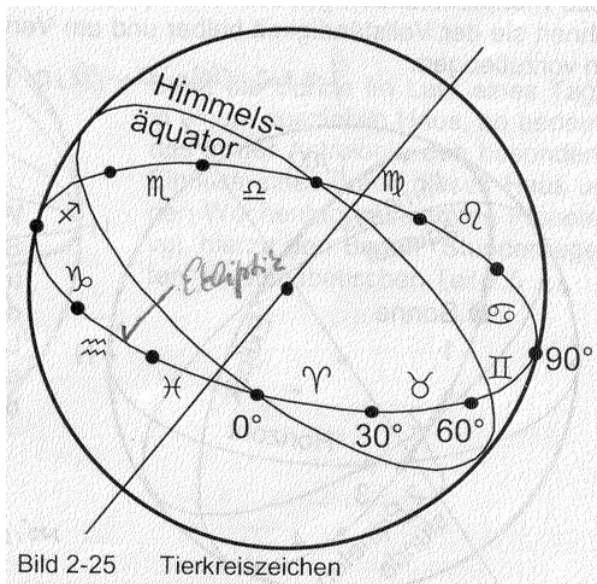
Die aus dem Nichts auftauchende Gleichung für die Länge des lichten Tages lasse ich weg, so lange die zur Herleitung nötige Mathematik (sphär.Trig.?) fehlt.

2.4 Einige astrologische Begriffe

Es sei das Wagnis erlaubt, den bisher angegebenen astronomischen Begriffen einige astrologische folgen zu lassen. Bei diesen handelt es sich aber nur um solche, die Realitäten am Himmel benennen und zuweilen auch auf Sonnenuhren vorkommen. Ihrer Verwertung zu Horoskopen wird nicht nachgegangen.

2.4.1 Tierkreiszeichen

Name	Symbol
Widder	♈
Stier	♉
Zwillinge	♊
Krebs	♋
Löwe	♌
Jungfrau	♍
Waage	♎
Skorpion	♏
Schütze	♐
Steinbock	♑
Wassermann	♒
Fische	♓

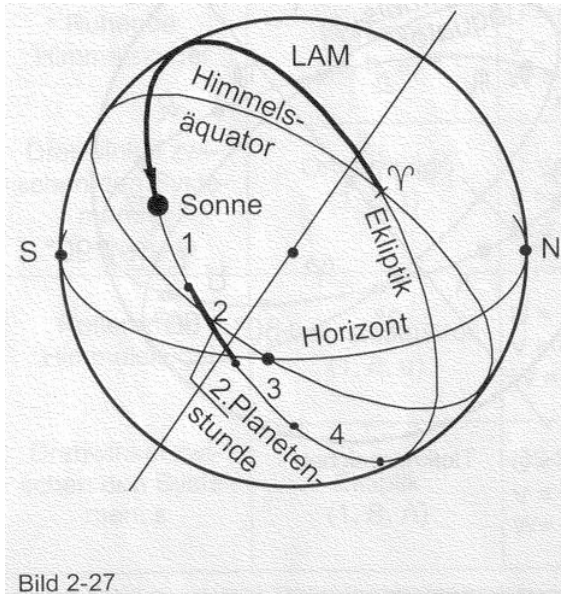
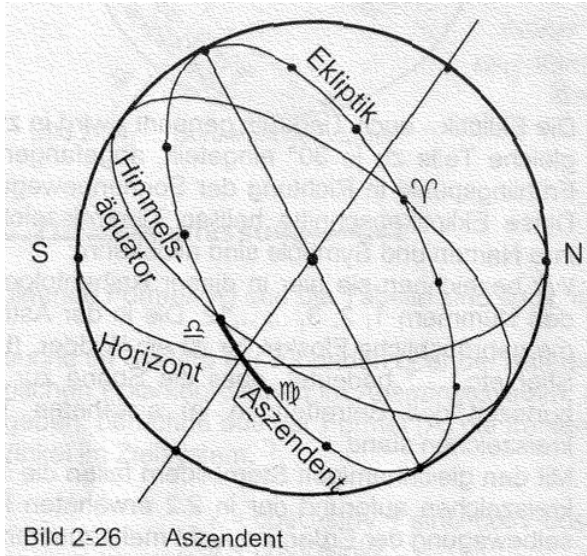


Die Ekliptik, in der Astrologie auch Tierkreis genannt, wird in zwölf (12) gleiche Teile zu je 30° unterteilt, angefangen im Frühlingspunkt in Richtung der jährlichen Sonnenbewegung. Diese Ekliptikabschnitte heissen Tierkreiszeichen, ihre Namen und Symbole sind jedem bekannt. Die häufigste astrologische Floskel lautet z.B., jemand sei ein Widder, Stier, etc., was bedeutet, dass die Sonne bei dessen Geburt in diesem Tierkreiszeichen stand. Mit den gleichnamigen Sternbildern fallen die Tierkreiszeichen wegen der Kreiselbewegung der Erdachse (s.2.2.4) nicht mehr zusammen, das war aber immerhin vor etwa 2'000 Jahren Realität. So findet sich heute z.B. der Frühlingspunkt nicht mehr beim Eintritt der Sonne in das Sternzeichen Widder, sondern ist zum Eintritt in die Fische vorverschoben.

Um die Zeichen mathematisch einbinden zu können, geben wir ihnen eine Nummer **k** in obiger Reihenfolge, also $1 \leq k \leq 12$.

Steht die Sonne auf der Grenze zwischen zwei (2) Tierkreiszeichen, so ist ihre ekliptikale Länge $\Lambda = (k-1) \cdot 30^\circ$,
woraus die Deklination berechnet werden kann (s.2.3.3.5).

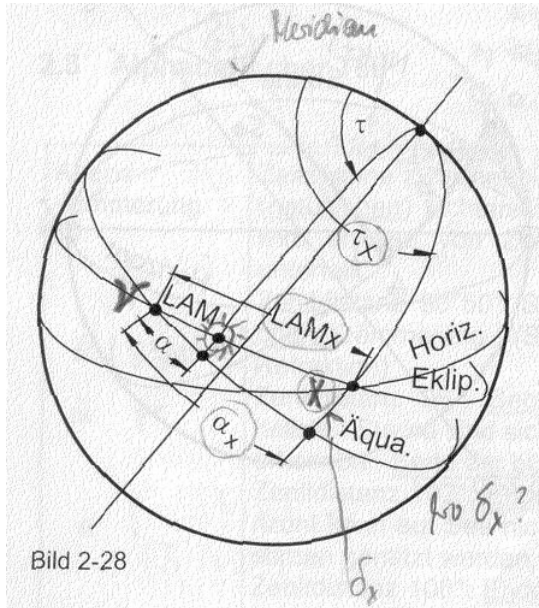
2.4.2 Aszendent und Planetenstunden



Unter **Aszendent** zu einem festen Zeitpunkt (i.d.R. ein Geburtstermin mit Tag **und Tageszeit**) versteht man das Tierkreiszeichen, das gerade aufgeht. Jedes Tierkreiszeichen ist also für etwa 2 Stunden auch ein Aszendent. Der ekliptikale Längen-Bereich beträgt 30° und liegt bei $(k-1) \cdot 30^\circ \leq \Lambda \leq k \cdot 30^\circ$.

Die **Planetenstunden** werden nach dem seit Sonnenaufgang aufgegangenen Zwölfteln der Ekliptik gezählt, ähneln also den babylonischen Stunden (s.3.5.2), die nach den seit Sonnenaufgang aufgegangenen 24-steln des Äquators gezählt werden. Die Zwölftel-Nummer laute jetzt **j** mit $1 \leq j \leq 12$,

woraus $\Lambda_P = \Lambda + (j-1) \cdot 30^\circ$ berechnet werden kann. Λ ist die momentane ekliptikale Länge der Sonne, Λ_P gehört dann zum Ekliptikpunkt, der gerade zu Beginn der j-ten Planetenstunde aufgeht.



In einem Beispiel soll der Stundenwinkel der Sonne bei bekanntem Aszendent oder bekannter Planetenstunde bestimmt werden. Für die Planetenstunde wird zusätzlich die ekliptikale Länge der Sonne gebraucht (wodurch auch deren Rektaszension und Deklination bekannt sind). In Bild 2-28 bedeuten

- X: aufgehender Punkt der Ekliptik
- Λ_X : ekliptikale Länge von X
- α_X : Rektaszension von X
- δ_X : Deklination von X
- τ_X : Stundenwinkel von X
- S: Sonne
- Λ_S : ekliptikale Länge von S
- α_S : Rektaszension von S
- δ_S : Deklination von S
- τ_S : Stundenwinkel von S

Bei bekanntem Aszendent lautet die Vorgabe

$$\Lambda_X = (k-1) \cdot 30^\circ, \text{ das Tierkreiszeichen } k \text{ beginnt, Aszendent zu sein.}$$

Bei bekannter Planetenstunde lautet die Vorgabe

$$\Lambda_X = \Lambda_S + (j-1) \cdot 30^\circ, \text{ die Planetenstunde } j \text{ beginnt.}$$

Mit den Formeln von 2.3.6 errechnet man α_X und δ_X . Die Gleichung für τ_X lautet

$$\cos \tau_X = -\tan \varphi \tan \delta_X \text{ mit } 0^\circ \geq \tau_X \geq -180^\circ$$

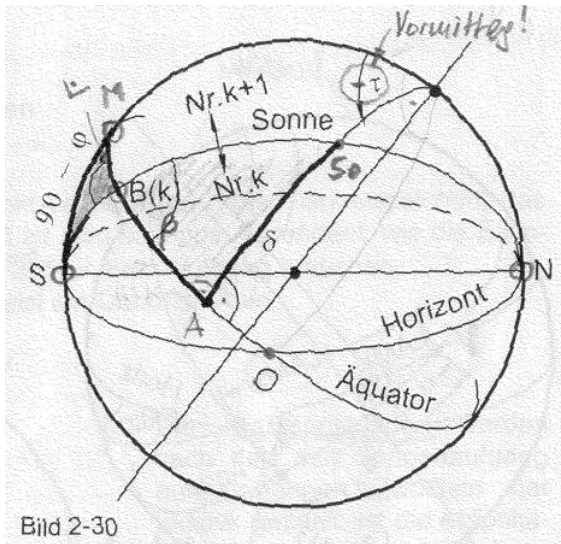
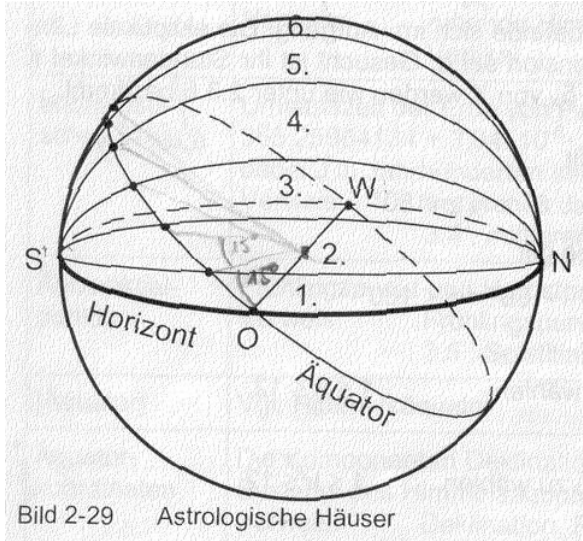
*)

Aus Bild 2-28 liest man dann das Ergebnis ab:

$$\tau_S = \tau_X - (\alpha_X - \alpha_S).$$

*) Das Beispiel steht wegen dieser aus dem Nichts auftauchenden Gleichung (identisch mit der in 2.3.5.2 weggelassenen) ohne mathem. Hilfe auf methodisch wackeligen Füßen.

2.4.3 Astrologische Häuser



Hierunter versteht man Kugelzweiecke auf der ruhenden Himmelskugel, die durch Grosskreise begrenzt werden, die ihrerseits durch den Nord- und Südpunkt gehen und den Ortsäquator regelmässig in 15°-Stücke teilen. Wir geben ihnen die Nummer i , die im Osten zu zählen beginnt, also $1 \leq i \leq 12$.

In der Astrologie gesteht man dem den Wochentag bestimmenden Planeten einen besonderen Einfluss zu, wenn die Sonne im Laufe eines Tages in einem speziellen Haus steht (s. "Stundenregent" im alphabetischen Teil 2.5).

In einem Beispiel soll der Stundenwinkel τ der Sonne bei bekannter Deklination δ bestimmt werden, wenn die Sonne am Anfang eines Hauses mit $i > 1$ steht (Anfang des 1. Hauses ist der Horizont, für den die Zusammenhänge einfacher zu ermitteln sind). Mit Hilfe von Bild 2-30 ergibt sich folgendes:

Hilfswinkel $\beta(i)$ im rechtwinkligen sphärischen Dreieck SMB

$$\cot \beta(i) = \sin(90^\circ - (i-1) \cdot 15^\circ) \cdot \cot(90^\circ - \varphi)$$

$$= \cos((i-1) \cdot 15^\circ) \cdot \tan \varphi,$$

Hilfswinkel $\beta(i)$ im rechtwinkligen sphärischen Dreieck BSoA

$$\cot \beta(i) = \sin((i-1) \cdot 15^\circ - 90^\circ - \tau) \cdot \cot \delta,$$

Auflösung nach τ
$$\tau = (i-1) \cdot 15^\circ - 90^\circ - \arcsin(\cos((i-1) \cdot 15^\circ) \cdot \tan \varphi \cdot \tan \delta)$$
 mit $2 \leq i \leq 12$.

Für dieses Beispiel ist ohne Vorbereitung sphärische Mathematik gebraucht, was befremdend wirkt, sieht man sich die Lektion zu simpler Polarkoordinaten-Mathematik unter 2.3 an. Sphär. Mathe nachholen!

2.4.4 Zusammenfassung der angegebenen Rechnungen

2.4.4.1 Tierkreiszeichen

Steht die Sonne am Anfangspunkt des Tierkreiszeichens k , so ist ihre ekliptikale Länge
 $\Lambda = (k-1) \cdot 30^\circ$.
 Hieraus lassen sich Deklination und Rektaszension der Sonne gemäss 2.3.6 berechnen.

2.4.4.2 Azendent und Planetenstunden

Ein Ekliptikpunkt X der Länge Λ_X befinde sich im Aufgang. Die ekliptikale Länge der Sonne sei Λ , ihre Rektaszension sei α . Gesucht ist ihr Stundenwinkel τ_S .

Für die Azendenten ist $\Lambda_X = (k-1) \cdot 30^\circ$ mit $(1 \leq k \leq 12)$ zu wählen.

Für die Planetenstunden ist $\Lambda_X = \Lambda_S + (j-1) \cdot 30^\circ$ mit $(1 \leq j \leq 12)$ zu wählen.

Mit den Formeln von 2.3.6 errechnet man α_X und δ_X . Die Gleichung für τ_X lautet

$$\cos \tau_X = -\tan \varphi \tan \delta_X \quad \text{mit} \quad 0^\circ \geq \tau_X \geq -180^\circ$$

Das Ergebnis lautet: $\tau_S = \tau_X - (\alpha_X - \alpha_S)$.

2.4.4.3 Astrologische Häuser

Die Sonne stehe am Anfang des Hauses i , wobei $(2 \leq i \leq 12)$ gilt. Ihre Deklination δ sei bekannt. Gesucht ist ihr Stundenwinkel τ . Er lautet

$$\tau = (i-1) \cdot 15^\circ - 90^\circ - \arcsin(\cos((i-1) \cdot 15^\circ) \cdot \tan \varphi \tan \delta)$$

2.5 Alphabetischer Teil

aus Original-Handbuch [bearbeitet](#) übernehmen

Kap. 3 Chronologie und Kalender

Dieses Kapitel ist stärker gegliedert als im Original.

1. Zeit, wahrer und mittlerer Sonnentag
2. Mittlere Sonne
3. Wahre und mittlere Ortszeit, Zeitgleichung
4. Zonenzeit
5. Andere Tageseinteilungen
6. Der Kalender
7. Ungleichheit der wahren Sonnentage, Ursachen
8. Der Zeitausgleich, die Zeitgleichung
9. Alphabetischer Teil

Der Begriff Chronologie ist hier in seinen Bedeutungen als Zeitmessung und **Zeitrechnung** gebraucht. Der Begriff Chronometrie ist einschränkender, bedeutet nur Zeitmessung.

Behandelt wird vorwiegend die Rechnung der **Tageszeit**. Die **Jahreszeiten** wurden bereits erwähnt (s.2.2.2). Der Abschnitt **Kalender** ist kurz, weil eine Sonnenuhr über ein (1) Jahr hinaus keine Informationen liefert. Es wird der Schaltjahr-Zyklus besprochen, der Einfluss auf die Zeitgleichung (s 3.8) hat.

3.1 Zeit, wahrer und mittlerer Sonnentag

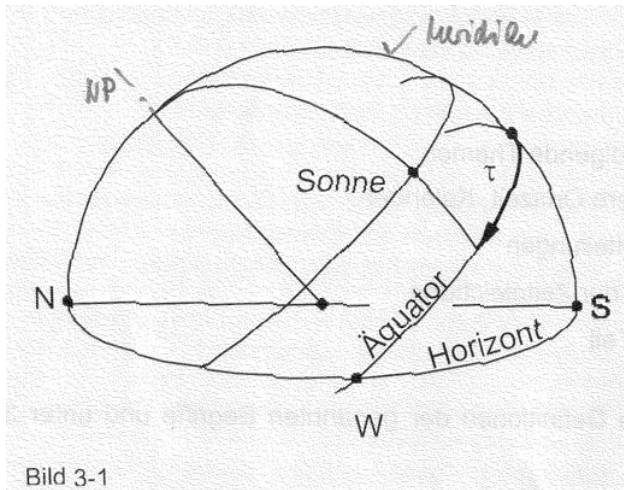


Bild 3-1

Für den Begriff **Zeit** ersparen wir uns eine Definition, da die Zeit "allen bekannt" (Isaac Newton) ist. Für die linear verlaufende, in irgend einer Einheit von irgend einem Nullpunkt aus gemessenen Zeit wird die übliche Bezeichnung **t** verwendet. Deren anschauliche Vorstellung ist eine Gerade (Zeit- bzw. t-Achse), versehen mit einem Durchlaufsinne, einem Nullpunkt und einer Einheit.

Im folgenden Text befinden wir uns vorwiegend im geozentrischen Weltbild und stellen uns bei unseren Beobachtungen sowohl auf die ruhende (Koordinaten sind Stundenwinkel und Deklination der Sonne) als auch auf die rotierende (Koordinaten sind Rektaszension und Deklination) Himmelskugel.

Bei der Zeitbestimmung interessiert uns aber fast ausschliesslich der Stundenwinkel τ der Sonne (Bild 3-1). Er ändert sich kontinuierlich, nicht etwa von Stunde zu Stunde, wie seine aus der Astronomie stammende Bezeichnung vermuten lassen könnte. Der Zeitraum für eine 360° -Winkeländerung von τ (wobei sich die Erde um etwa 361° um sich selbst dreht, s.2.2.3) ist der **Sonntag**, am einfachsten durch Beobachtung zweier (2) aufeinander folgender oberer Kulminationen bzw. Meridiandurchgänge messbar. Dieser im folgenden mit dem Zusatz **wahr** versehene Sonnentag (WST) ist leider übers Jahr nicht gleich lang und deshalb nicht als Einheit der Zeit geeignet. Seine Längenschwankung ist aber sehr regelmässig, so dass man durch eine Art Mittelwertbildung (**Zeitgleichung**) einen **mittleren** Sonnentag (MST) bestimmen kann, der schliesslich als Standardeinheit der Zeit verwendet wird. Sein

vierundzwanzigster (24.) Teil ist die **Stunde** (klassischer Sprachgebrauch), die als Einheit üblicherweise mit **h** bezeichnet wird.

3.2 Mittlere Sonne

Zu diesem mittleren Sonnentag gehört das für die strenge Behandlung der Zeitgleichung eingeführte Konstrukt der **mittleren Sonne**, ein fiktiver, mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Himmelsäquator (nicht auf der Ekliptik ! Jahreszeiten werden nicht unterschieden, $\delta = \text{const.} = 0.$) umlaufender Punkt. Seine Umlaufzeit beträgt ein (1) tropisches Jahr, gemessen zwischen zwei (2) Frühlingspunkten (s.2.2.4). Selbstverständlich läuft diese mittlere Sonne auch auf dem ruhenden Ortsäquator gleichmässig um. Ihre Dauer zwischen zwei (2) aufeinander folgenden Meridian-Durchgängen ist der konstante mittlere Sonnentag MST.

3.3 Wahre und mittlere Ortszeit, Zeitgleichung

Weil eine Sonnenuhr von der wahren Sonne "betrieben" wird, kann sie ohne besondere Korrekturen "nur" die wahre (Orts-) Zeit **WOZ** anzeigen. Mit der mittleren Sonne würde die mittlere (Orts-) Zeit **MOZ** angezeigt, mit der die WOZ nur an vier (4) Tagen im Jahr identisch ist. Dazwischen bleibt die WOZ-Uhr zweimal (2x) zurück, bzw. läuft zweimal (2x) voraus Die streng gesetzmässige Abweichung zwischen WOZ und MOZ hat den Namen **Zeitgleichung**. Sie wird benötigt, um die MOZ aus der von einer Sonnenuhr angezeigten WOZ auszurechnen, oder um eine Sonnenuhr zu konstruieren, die MOZ oder sogar Zonenzeit anzeigt.

Der Begriff *Zeitgleichung* ist für heutige Ohren befremdlich, denn wir verstehen unter Gleichung eine Gleichheit, mathematisch gesprochen die Gleichheit zwischen linker und rechter Seite einer Gleichung In *Zeitgleichung* ist noch die mittelalterliche Bedeutung von "Gleichung" als "eine Korrektur zufügen" erhalten geblieben. Man hat der wahren Sonnenzeit die Differenz zur mittleren Sonnenzeit hinzuzufügen, um zu letzterer zu gelangen.

3.4 Zonenzeit

WOZ und MOZ sind Sonnen- oder Orts-Zeiten, sie gelten nur für den Längengrad, auf dem die Sonnenuhr steht, oder auf dem sich die Zeitangabe nach der Sonne richtet. Die **Zonenzeit ZZ** ist die MOZ eines bevorzugten Längengrads λ_0 (für die mitteleuropäische ZZ = **MEZ** ist dies $\lambda_0 = -15^\circ$, Görlitz). Die ZZ unterscheidet sich von der MOZ maximal eine halbe ($\frac{1}{2}$) Stunde, wenn sie nur innerhalb $\lambda = \lambda_0 \pm 7,5^\circ$ gebraucht wird.

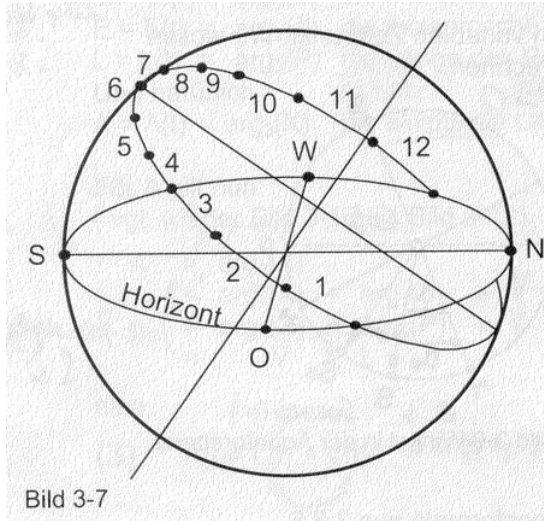
Aus politischen Gründen wird dieses Optimum oft nicht verwirklicht. Frankreich, Spanien und Portugal verwenden anstatt der "verpönten" Greenwich-Zeit GMT ($\lambda_0 = 0^\circ$) die MEZ. Der äusserste Festland-Ort Frankreichs liegt mehr als 19° , der Spaniens und Portugals sogar mehr als 24° westlicher als Görlitz. Im Sommer, wenn wegen der Sommerzeit die Uhren nochmals eine(1) Stunde vorgestellt werden, ist die Situation grotesk: Die Uhren laufen im Westen Spaniens und in Portugal ca. $2\frac{1}{2}$ Stunden der (mittleren) Sonne voraus. Zum Ausgleich beginnt das private und öffentliche Leben in diesen Ländern nach der Uhr sehr spät am Morgen und endet erst in später Nacht.

Eine Sonnenuhr für Zonenzeit muss also die am Himmel ablesbare WOZ zweifach (2x) korrigiert auf ihrer Stundenskala anzeigen. Dabei ist die Zonenkorrektur lediglich eine konstante Verschiebung, der Schritt von der wahren zur mittleren Sonne ist der aufwendige Zeitausgleich mit Hilfe der Zeitgleichung.

3.5 Andere Tageseinteilungen

Es handelt sich um die antiken und die mittelalterlichen Stunden.

3.5.1 Antike (temporale) Stunden



Das ist die "bürgerliche" Zeit der Griechen und Römer, die in temporale Stunden eingeteilt war. Letztere werden auch biblische Stunden genannt, weil in der Bibel von ihnen die Rede ist.

Dafür wird der lichte Tag (s.2.3.4.2) in zwölf (12) gleich lange Abschnitte unterteilt. Für die Deklination wird vereinfacht angenommen, dass sie sich während des Tages nicht ändert. Mit anderer Deklination an anderen Tagen ist aber die Länge des Tagbogens anders, d.h. dass auch eine Temporalstunde an verschiedenen Tagen des Jahres verschieden lang ist: im Sommer länger als im Winter. Dazu gehört, dass auch die Nacht zwölf (12) Temporalstunden hat: im Winter länger als im Sommer. Um temporale Tages-Stunden anzuzeigen, muss eine Sonnenuhr also die Deklination der Sonne auch erfassen.

Bei Beginn der k -ten Temporalstunde gilt für den Stundenwinkel die Beziehung

$$\tau = \tau_U (k-7) / 6 \quad \text{mit} \quad 1 \leq k \leq 12 ,$$

wobei τ_U der Stundenwinkel bei Sonnenuntergang ist. In seinem Doppel ($2x$) steckt die Länge des Tages.

3.5.2 Mittelalterliche (babylonische und italische) Stunden

Vor Einführung der Zonenzeit gab es in einigen Teilen Europas Tageseinteilungen mit Stunden seit Sonnenaufgang (babylonische oder griechische Stunden, beide Bezeichnungen sind historisch irreführend !) oder seit Sonnenuntergang (italische oder böhmische Stunden).

Im Gegensatz zu temporalen sind diese Stunden immer gleich lang (Äquinoktialstunden), aber der Zählbeginn ändert sich, wozu wiederum die Deklination auch erfasst werden muss.

Die i -te Stunde seit **Sonnenaufgang** beginnt mit dem Stundenwinkel

$$\tau = \tau_A + 15^\circ(i-1) \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq 24.$$

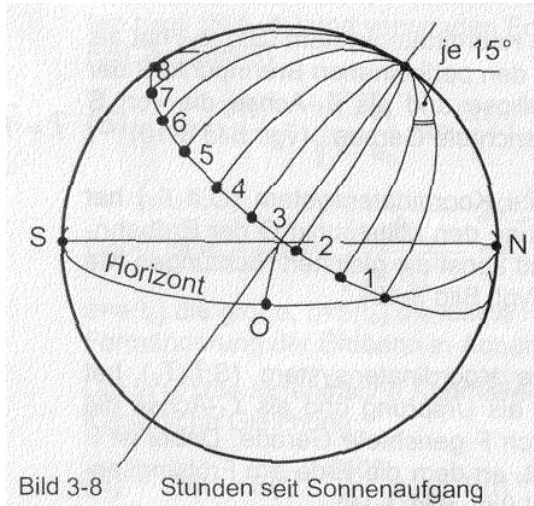
Die j -te Stunde seit **Sonnenuntergang** beginnt mit dem Stundenwinkel

$$\tau = \tau_U + 15^\circ(j-1) \quad \text{mit} \quad 1 \leq j \leq 24.$$

Dabei sind τ_A und τ_U der Stundenwinkel seit Sonnenauf- bzw. -untergang.

Babylonische Tages-Stunden beginnen immer bei 1 und enden auf einer Sonnenuhr z.B. bei 16 (Sommer-Solstitium, $\varphi=49^\circ$),

italische Tages-Stunden beginnen entsprechend z.B. erst bei 9 und enden immer bei 24 (nächster Sonnenuntergang).



3.6. Der Kalender

Das Problem des Kalenders besteht darin, dass das tropische Jahr (s.2.2.4) nicht eine ganzzahlige Summe von Sonnentagen (s.2.2.3) ist. Das aus 365 Tagen bestehende **Normaljahr** ist ca.0,2422 Tage zu kurz. Auflaufende Differenzen werden durch Einfügen von **Schalttagen** ausgeglichen. Die bei der letzten Kalenderreform von 1582 aufgestellten, noch heute gültigen Schalt-Regeln korrigieren den seit Julius Cäsar bestehenden vierjährigen Schaltjahr-Rhythmus, indem in einer Periode von 400 Jahren nicht 100 sondern nur 97 Tage eingeschoben werden. Der verbleibende Fehler müsste durch einen weiteren nicht eingeschobenen Tag pro 3000 Jahre korrigiert werden.

Die Haupt-Periode der **Zeitgleichung** ist in erster Näherung die Länge des tropischen Jahres. Will man die Zeitgleichung für ein Kalenderjahr angeben, so ist dessen Stellung im laufenden Schaltjahrzyklus zu beachten (s. 3.8.2).

3.7 Ungleichheit der wahren Sonnentage, Ursachen

Es handelt sich im Wesentlichen um zwei (2) Ursachen bzw. Effekte, die stichwortartig wie folgt lauten:

1. die leicht elliptische Form der Erdbahn.
 2. die im Weltraum fixe Richtung der gegenüber der Bahn-Normalen geneigten Erdachse,
- Der zweite Effekt wirkt sich stärker auf die Schwankung des wahren Sonnentages als der erste aus.

Der zweite Effekt lässt sich auch im geozentrischen Weltbild benennen, nämlich: Neigung der Ekliptik gegen den Himmelsäquator.

Beim ersten Effekt muss es bei der heliozentrischen Beschreibung bleiben. Im geozentrischen Weltbild mit Kreisen auf einer Himmelskugel sind die elliptischen Verhältnisse nicht darstellbar.

Beide Effekte sind in guter Näherung voneinander unabhängig, ihre Wirkungen lassen sich addieren (s.3.8.2, "elementare" Zeitgleichung). Jeder der beiden lässt sich so beschreiben, als gäbe es den anderen nicht. Das heisst für die Behandlung der Ekliptik-Neigung (2.Effekt), dass die Erdbahn vorerst als Kreis angesehen werden kann. Bei der Elliptik (1.Effekt) darf die Ekliptik-Neigung ignoriert werden.

Ein heliozentrisches Pendant zum Konstrukt der mittleren Sonne wäre, die Erde-Achse aufzurichten (2.) und die Erde auf kreisförmiger Bahn laufen (1.) zu lassen. So wäre der nötige Zusatzdreh der Erde über 360° (Sterntag) hinaus (, um die Sonne am nächsten Tag wieder im Meridian zu sehen) nicht mehr noch von der Achs-Lage abhängig. Er wäre proportional dem täglich konstanten Stück der Kreisbahn. Auf der tatsächlichen Ellipsen-Bahn (1.) schwankt die Tagesstrecke mit einjähriger Periode. Und bei der tatsächlichen Achs-Orientierung (2.) schwankt der Zusatz-Dreh nochmals, denn es zählt der Drehanteil (Zerlegung eines Drehvektors in Drehungen um sich schneidende Achsen) um die Bahnachse. Die Achs-Schräge lässt den wahren Sonnentag mit halbjähriger Periodendauer zusätzlich variieren.

3.7.1 Einfluss der Ekliptik-Neigung auf die Tageslänge

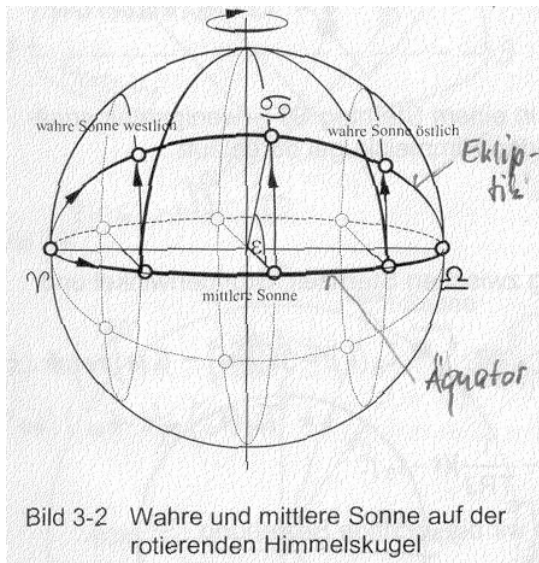


Bild 3-2 Wahre und mittlere Sonne auf der rotierenden Himmelskugel

Weil die Ellipsenform der Erdbahn vorerst unbeachtet bleibt, ist die "wahre" Sonne im Bild 3-2 auch eine fiktive, eine sich nämlich auf einer Kreisbahn gleichmässig bewegende Sonne. Bild 3-2 enthält die Kreise dieser "wahren" (Ekliptik) und der mittleren Sonne (Himmelsäquator) auf der rotierenden Himmelskugel. Beide Sonnen passieren gleichzeitig die beiden Schnittpunkte Frühlings- und Herbstpunkt. Dazwischen laufen sie gleichmässig schnell auf ihren Bahnen. Die gleichmässige Änderung der ekliptikalen Länge der "wahren" Sonne bedeutet aber ungleichmässige Änderung ihrer Rektaszension. Von Frühlingspunkt bis Sommersonnenwende ist sie westlicher (kleinere Rektaszension) als die mittlere Sonne, ist täglich früher im Süden, "geht also vor". Bis zum Herbstpunkt ist es umgekehrt. Im anderen Halbjahr ist es wieder genau so: "Vorgehen", dann "Nachgehen". Die Periode ist ein halbes ($\frac{1}{2}$) Jahr.

3.7.2 Einfluss der Ellipsenbahn auf die Tageslänge

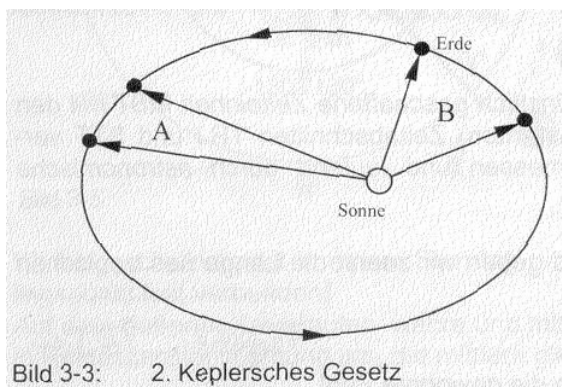


Bild 3-3: 2. Keplersches Gesetz

Die Erde zieht in Sonnennähe schneller über die elliptische Umlaufbahn als bei Sonnenferne. Das 2.Kepler'sche sagt dazu: Die vom Radius Sonne-Erde überstrichene Fläche ist in gleichen Zeitabschnitten t_0 gleich gross: $A=B$. Unterschiedlich lang sind aber die Bögen a und b. Diese Tatsache ist folglich auch beteiligt am übers Jahr nicht gleichmässigen Zusatzdreh (s.2.2.3) zur Beendigung des (wahren) Sonnentags. Die Periode dieses Anteils ist ein (1) Jahr.

3.7.3 Drei-Zeiger-Modell

Bild 3-4 stellt die Verhältnisse zusammenfassend dar, diesmal auf der ruhenden Himmelskugel, auf deren Nordpol ein "astronomisches Zifferblatt" angebracht ist. Diese interessante Darstellung ist weniger eine Erklärhilfe als ein Test für das Verständnis des vorher Erklärten. Das Zifferblatt trägt drei (3) Zeiger, die mit der wahren Sonne, der mittleren Sonne und dem Frühlingspunkt täglich um die



sWetzel.ch

Himmelsachse laufen (allerdings z.T. unter dem Horizont). Die wahre Sonne ist die wirkliche, d.h. die ungleichmässig auf elliptischer Bahn umlaufende Sonne.

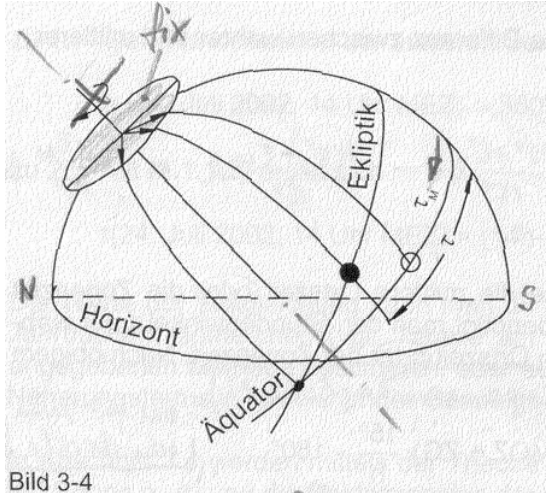


Bild 3-4

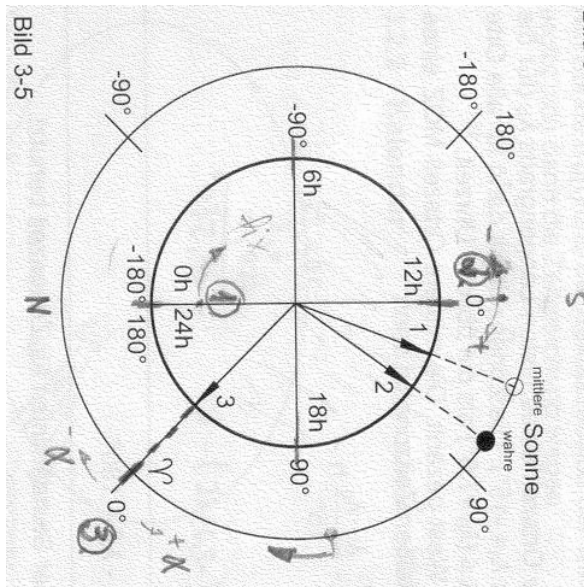


Bild 3-5 ist die senkrechte Sicht auf dieses Zifferblatt. Es trägt für den Stundenwinkel eine Skala in Grad ($^{\circ}$) und eine in Stunden (h). Der äussere Kreis ist der Himmelsäquator mit der mittleren Sonne und der Rektaszensions-Skala. Er läuft mit konstanter Geschwindigkeit in einem Sterntag um das zentrale, ruhende Zifferblatt. Mit ihm ist der Ekliptikkreis mit der wahren Sonne fest verbunden.

Ablesen kann man

- die MOZ mit Zeiger 1,
- die WOZ mit Zeiger 2,
- die ST (Sternzeit) mit Zeiger 3 und
- die ZG (Zeitgleichung) als Differenz zwischen den Zeigern 1 und 2.

Dabei kann man sich erinnern, dass die beiden Sonnen langsam rückläufig sind (Gegen-Uhrzeiger-Sinn), und deshalb die ST schneller als die WOZ und die MOZ "ablaufen", und dass die wahre Sonne ungleichmässig läuft, der gleichmässig laufenden mittleren Sonne zeitweise voraus-, zeitweise nachläuft.

3.8 Der Zeitausgleich, die Zeitgleichung

Nach Kenntnis der Ursachen für die Ungleichheit der wahren Sonnentage ist nun die quantitative Behandlung der Zeitgleichung möglich. Es sind verschiedene Berechnungen bekannt. Zwei von ihnen werden hier beschrieben.

Die erste der beiden ist ein vor allem für Sonnenuhrenfreunde gedachtes Näherungsverfahren, wobei die hergeleitete Zeitgleichung die Summe zweier streng periodischer Terme ist, mit der eine Sonnenuhr in ausreichender Näherung Jahrzehnte lang korrigiert ablesbar ist. Das Vorgehen ist "elementar", was u.a. bedeutet, dass nur geringe mathematische Kenntnisse zum Verständnis nötig sind.

Die zweite beschriebene Methode ist eine "astronomische", denn sie erfüllt die in der Astronomie üblichen grösseren Genauigkeits-Ansprüche. Das heisst aber leider auch, dass der Sonnenuhrenfreund die physikalischen Überlegungen und die Rechnungen häufig nicht versteht. Deshalb ist die folgende Beschreibung für Nicht-Astronomen "aufbereitet". Das Ergebnis einer solchen Behandlung unterscheidet sich vom "elementaren" Vorgehen vor allem bezüglich der Periodizität. Die Zeitgleichung ist mindestens in Näherung mit dem tropischen Jahr anzusehen. "Elementar" wird aber auf das Kalenderjahr bezogen und dabei die Problematik in einem Schaltjahr häufig unter den Tisch fallen gelassen. Innerhalb des Kalenderjahres ist die Zeitgleichung keine genaue Summe aus harmonischen Schwankungen, weil die Jahresfahrt der Erde um die Sonne keine Kreis- sondern eine elliptische Bewegung ist. Fehler wegen "elementaren" Nicht-Beachtens langfristiger Veränderungen der Bahnfahrt-Parameter sind zwar von zweiter Ordnung klein, erfordern aber, dass die Berechnung nach ein paar Jahren wiederholt werden sollte.

Die Erd-Drehung erfolgt sehr gleichmässig (Tagestrib der kosmischen Uhr, schnell), was sich in der Konstanz des Sterntages (360°-Drehung,) zeigt. Der Sonnentag (s.2.2.3) ist aber erst nach einem Zusatzdreh beendet. Letzterer ist wegen der Bahnfahrt der Erde (Jahrestrieb, langsam) nötig und nicht konstant. Mit der Zeitgleichung wird also nur eine Fehlerbetrachtung für den Jahrestrieb der kosmischen Uhr vorgenommen..

3.8.1 "Elementare" Berechnung der Zeitgleichung

Eingearbeitet ist ein älterer Artikel: "**Die Zeitgleichung, elementar behandelt**"

Die übernommenen Bilder werden vorläufig als "Abbildungen" in eigener Nummerierung bezeichnet. Auch die Nummerierung von Gleichungen und Anmerkungen ist vorläufig übernommen.

3.8.1.1. Einleitung

Der berühmte amerikanische Physiker *Feynman* hielt eine ungewöhnlichen Vorlesung für Studienanfänger mit dem auch für die Zeitgleichung bedeutsamen Titel "Die Bewegung der Planeten um die Sonne " [1]. Ungewöhnlich daran war, dass er den darin enthaltenen Ellipsen-Beweis elementar führte. Mit elementar meinte er, dass zum Verständnis wenig Vorwissen, allerdings viel Intelligenz nötig sei. Er leitete den Satz mit vorwiegend geometrischen Überlegungen her, denn Eleganz und Schönheit geometrischer Beweise spreche viele Menschen an. Nachteil sei, dass man anders als bei Verwendung höherer Mathematik mit Geduld viele Schritte machen müsse. *Feynman* ist Vorbild für die folgende Behandlung der Zeitgleichung. Der von ihm verwendete Begriff *elementar* wird ab jetzt kursiv geschrieben.

Die zu findende Zeitgleichung ist für den Gebrauch bei einer Sonnenuhr gedacht. Sie darf deshalb einige astronomische Tatsachen mit geringem Einfluss ausser Acht lassen. Und bei der Herleitung dürfen Vereinfachungen erfolgen. Die viel genauere, d.h. umfassendere und exaktere wissenschaftliche Bearbeitung (s.3.8.2) erfährt nämlich beim "Hausgebrauch" – das ist seine Anwendung beim Ablesen einer gewöhnlichen Sonnenuhr – nicht die ihm zustehende Würdigung. Eine solche Uhr kann man nicht genauer als auf eine Minute ablesen.

Dass die Zeitgleichung nicht jährlich neu berechnet werden muss, wird von der Tatsache bestärkt, dass viele Sonnenuhren mit deren Werten oder Kurven auf Dauer versehen sind. Geheimnis bleibt aber oft, wie man diese Werte oder Kurven berechnen kann. Im Folgenden wird das auf *elementare* Weise gezeigt. Glücklicherweise lassen sich dabei einige Vereinfachungen machen, so dass die Zahl der Schritte nicht allzu gross und die Geduld beim Lesen nicht zu sehr beansprucht wird. Sollte dem

Leser die eine oder andere Vereinfachung als zu riskant erscheinen, so hat er am Ende doch zu einer Zeitgleichung gefunden, die sich "mit blossem Auge" betrachtet nicht vom bekannten Ergebnis aus einer nicht *elementaren* wissenschaftlichen Arbeit unterscheidet. Einer solchen Arbeit zu folgen, hätte aber ein höheres Mass an Mathematik und – was gleich gewichtig ist – ziemlich viele astronomische Insider-Kenntnisse vorausgesetzt.

3.8.1.2. Zeitgleichungs-Ursachen

Nicht beachtet werden die sehr langsamen Veränderungen am Sonnenhimmel, wie Form und Lage der Erdbahn-Ellipse, Jahr-Länge(n), Neigung der Erdachse u.ä.. Ausgewertet werden die bekannten Ursachen für das "Falsch-Gehen" der Sonnenuhr. An diese sei kurz erinnert.

Die Erde muss sich pro Tag mehr als einmal um sich selbst drehen. Nach einer 360°-Drehung ist erst ein Sterntag (s.2.2.3) vollendet. Die (von der Sonne überstrahlten) Sterne stehen wieder am selben Ort (Süden, Meridian), die Sonne ist aber wegen der kurzen Bahnfahrt der Erde noch nicht dort angekommen. Deshalb muss sich die Erde zur Vollendung des Sonnentages noch ein Stück weiter drehen (Abb.1). Zwei Ursachen bewirken, dass das täglich unterschiedlich lange dauert.

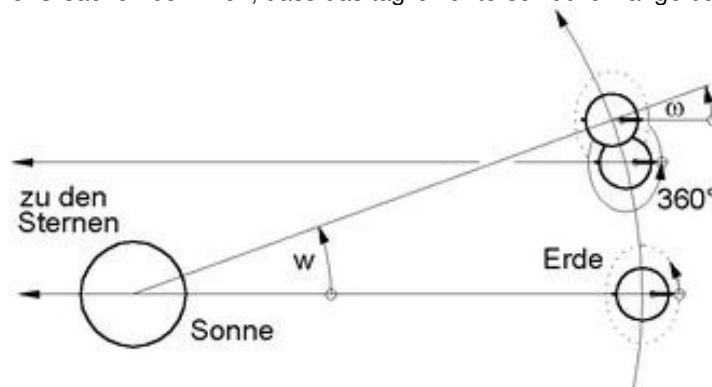


Abb.1 tägliche Drehung und Bahnfahrt der Erde

Ellipse (1. Ursache: variabler Bahnwinkel)

Auf der schwach elliptischen Erdbahn ist der Abstand der Erde zur Sonne variabel. In Sonnennähe führt die tägliche Bahnfahrt weiter als in Sonnenferne. Die Zusatzdrehung der Erde muss in einer Hälfte des Jahres grösser, in der anderen Hälfte kleiner sein, weshalb in diesen Zeiten der Tag länger bzw. kürzer als im Durchschnitt ausfällt.

Ekliptik (2. Ursache: variables Verhältnis zwischen Bahnwinkel und zusätzlichem Drehwinkel)

Die (im Weltraum fixe) Drehachse der Erde steht nicht senkrecht auf der Bahnebene wie in Abb.1, weshalb sich das Verhältnis zwischen Bahnwinkel und zusätzlichem Drehwinkel täglich ändert. Befinden sich beide Achsen in einer Ebene (Sonnenwenden, Abb.2, links), ist der Zusatz-Drehwinkel grösser als der zu kompensierende Bahnwinkel. Wenn sie sich maximal kreuzen (Tag/Nacht-Gleichen, Abb.2, rechts), ist er kleiner. Die nicht konstante tägliche Bahnfahrt führt also nicht 1:1 zur täglichen Zusatzdrehung. In zwei Vierteln des Jahres ist das Verhältnis grösser, in den beiden Vierteln dazwischen kleiner mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Tageslänge.

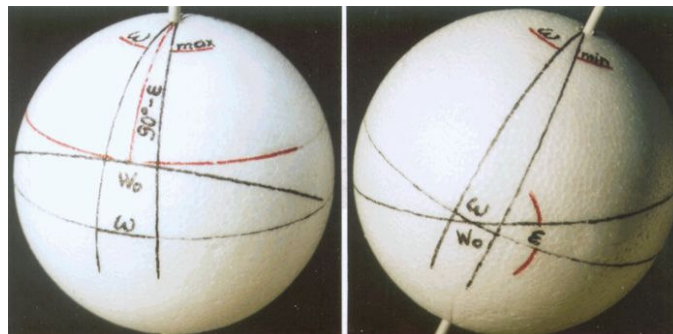


Abb.2 Winkelunterschiede zur Sonnenwende (links) und zur Tag/Nacht-Gleiche (rechts) [2]

3.8.1.3. Schwankung der Tageslänge in Sekunden

Schwankungen sind relative Angaben zu einer mittleren Grösse. Kleine ($\ll 1$) periodische Schwankungen lassen sich in guter Näherung (Näherung #1) mit einer Kreisfunktion (Sinus- oder Cosinus-) beschreiben, für die dann nur Amplitude, Periodendauer und Nullpunkt zu bestimmen sind.

Die Wirkungen der beiden Ursachen wären eigentlich miteinander zu multiplizieren. Weil aber beide Schwankungen klein sind, erscheinen sie im Ergebnis in Näherung als Summe (#2). Deshalb ist es möglich, beide Ursachen getrennt zu behandeln und erst am Schluss die Summe aus ihren Wirkungen zu bilden.

Ellipse (1. Ursache)

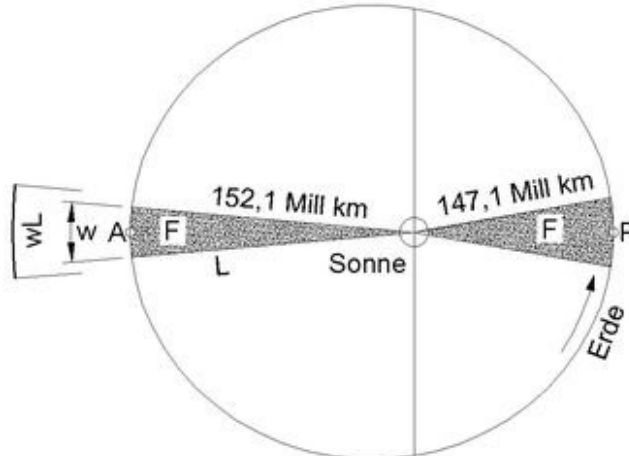


Abb.3 zweites *Kepler'sches* Gesetz

Das zweite *Kepler'sche* Gesetz lautet: Die Verbindungslinie eines Planeten mit der Sonne überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleich grosse Flächen (Abb.3). Der hier zu betrachtende Zeitabschnitt ist der Tag, die Flächen F sind wesentlich kleiner (spitzer) als abgebildet.

mittleres L_0 ($= 149,6 \cdot 10^6$ km)

variables $L = L_0 \pm \Delta L$ ($= 149,6 \cdot 10^6$ km $\pm 2,5 \cdot 10^6$ km)

relatives $l = L/L_0 = 1 \pm \Delta L/L_0 = 1 \pm \Delta l$ ($= 1 \pm 0,0167$)

Der tägliche Bahnwinkel beträgt nur ca. 1°

(pro Jahr eine ganze Bahnrunde $= 360^\circ$):

$w_0 = 360^\circ / 365,2422 \text{ Tage} = 0,9856^\circ$.

In der nächsten Zeile steckt folgende Näherung (#3): Bahnstück als Kreisbogen $w \cdot L$ angenommen;

bei ganzem Kreis käme man mit $2\pi L$ (Umfang) auf $F = \pi L^2$, die bekannte Kreisfläche.

$F = wL \cdot L / 2 = wL^2 / 2$ (w im Bogenmass, Abb.3).

Nun weiter

$w = 2F/L^2$, und weiter

$w_0 = 2F/L_0^2$ (mittleres Dreieck).

Und nun relativ, also mit Schwankung:

$w/w_0 = L_0^2/L^2 = 1/l^2 = 1/(1 \pm \Delta l)^2$.

Weil $\Delta l \ll 1$ sind zwei weitere Näherungs-Schreibweisen möglich :

#4: $(1 \pm \Delta l)^2 = (1 \pm 2\Delta l)$.

#5: $1/(1 \pm 2\Delta l) = (1 \mp 2\Delta l)$, Kehrwert und Vorzeichenwechsel.

Das besser lesbare \pm wird im Folgenden beibehalten, weil (das Gegenstück im PC nicht zu finden und) die richtige Vorzeichenzuordnung nicht fraglich ist. Neue Schreibweise:

$w/w_0 = 1 \pm 2\Delta l$.

Über den Bogen von nur ca. 1° kann die Bahngeschwindigkeit als konstant angesehen werden (#6).

Also schwankt die Fahrtdauer von Tag zu Tag wie der Bahnwinkel:

$T_1/T_0 = 1 \pm \Delta t_1 = 1 \pm 2\Delta l = 1 \pm 0,0334$

Mit $T_0 = 236 \text{ sec}$ ($T_0 = 24 \text{ std} \cdot w_0 / (w_0 + 360^\circ)$) ist

$\Delta T_1 = \Delta t_1 T_0 = \pm 7,9 \text{ sec}$.

Der Tag ist in Perihelnähe (P) ca.8 sec länger als im Mittel und in Nähe des Aphel (A) ca.8 sec kürzer Seine **ganzjährige** Schwankung aus Ursache 1 lässt sich mit folgender Cosinus-Funktion beschreiben (#1). Vernachlässigt wird dabei, dass Sommer- und Winter-Halbjahr wegen der elliptischen Bahn nicht genau gleich lang sind:

$$7,9\text{sec} \cos ((d-d_1) 360^\circ/365) \quad (1) \quad (\text{Abb.4}).$$

d ist die Zeit von 0 bis 365 Tage (in Schaltjahren bis 366, Divisor ebenfalls 366). Der Nullpunkt ist ab Jahreswechsel um $d_1=3\text{Tage}$ in die Zukunft verschoben. Das ist der Tag des Perihel-Durchgangs.

Ekliptik (2. Ursache)

Bei Ursache 1 bildet sich der (schwankende) Bahnwinkel w als Teil der Bahn auf dem Äquator ab. Er wird durch den dort zu messenden Drehwinkel ω eins zu eins kompensiert.: $w = \omega$ (Abb.1). Jetzt erscheint der (mittlere, #2) Bahnwinkel w_0 als Bogenstück eines Kreises auf der Erdoberfläche, der gegen den Äquator um ε geneigt ist (Abb.2). Zu ermitteln ist der zugehörige Drehwinkel ω , der ein Stück des Äquatorkreises ist. Wegen (#1) genügen Grösst- und Kleinstwert dieses Winkels.

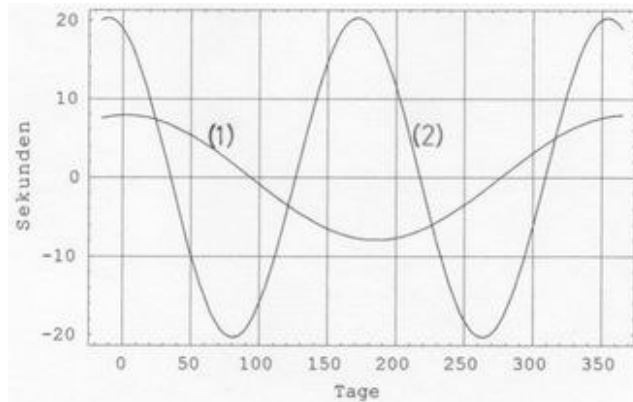


Abb.4 Schwankungen der Tageslänge

Grösstwert, Sonnenwenden (Abb.2, links):

Das w_0 entsprechende Bogenstück auf der Erde ist Teil eines Grosskreises (Ekliptik). Da es klein ist, darf dieser Kreis durch einen Kleinkreis (Wendekreis) ersetzt werden (#7). w_0 steht dann zu ω_{\max} im gleichen Verhältnis wie die Radien von Klein- und Äquatorkreis, das ist $w_0/\omega_{\max} = \cos \varepsilon$.

$$\omega_{\max} = w_0/\cos \varepsilon, \text{ mit } \varepsilon = 23,44^\circ \text{ ist } \omega_{\max} = 1,07425^\circ.$$

Kleinstwert, Tag/Nacht-Gleichen (Abb.2, rechts):

Das sphärische Doppel-Dreieck aus w_0 , ε und ω_{\min} ist klein genug, dass es als ebenes Dreieck angesehen werden darf (#8). Mit ebener Trigonometrie heisst es $\cos \varepsilon = (\omega_{\min}/2) / (w_0/2)$

$$\omega_{\min} = w_0 \cos \varepsilon = 0,90427^\circ.$$

Mit sphärischer Trigonometrie lassen sich die Werte exakt bestimmen, man findet aber bei der gewählten Auflösung noch keinen Unterschied.

Die Verarbeitung der beiden Werte führt zu:

$$\text{mittlerer Wert } \omega_0 = 0,98926.$$

$$\omega = 0,98926 \pm 0,08499,$$

$$\omega/\omega_0 = 1 \pm \Delta\omega = 1 \pm 0,08591.$$

Die Drehgeschwindigkeit der Erde ist konstant. also schwankt die Tageslänge wie der Drehwinkel:

$$T_2/T_0 = 1 \pm \Delta t_2 = 1 \pm \Delta\omega$$

$$\text{Mit } T_0 = 236 \text{ sec ist } \Delta T_2 = \Delta t_2 T_0 = \pm 20,3 \text{ sec}.$$

Der Tag ist an den Sonnenwenden ca.20 sec länger als im Mittel, an den Tag/Nacht-Gleichen ca.20 sec kürzer. Seine **halbjährige** Schwankung aus Ursache 2 lässt sich mit folgender Cosinus-Funktion beschreiben (#1):

$$20,3\text{sec} \cos ((d-d_2) 720^\circ/365) \quad (2) \quad (\text{Abb.4})$$

Von den beiden Sonnenwenden liegt die des Winters am nächsten beim Jahreswechsel. Der Nullpunkt ist um $d_1=-10\text{Tage}$ in die Vergangenheit verschoben.

3.8.1.4. "Vor- und Nachgehen" der Sonnenuhr

Aus schon genannten Gründen können die Effekte getrennt voneinander behandelt werden, was vorläufig weiter geschehen soll.

Folgen beispielsweise Tage aufeinander, die zu kurz sind, so geht die Sonnenuhr schneller als die "Normaluhr" und eilt ihr schliesslich voraus. Sie geht erst wieder langsamer, wenn längere Tage folgen und beginnt nachzugehen, wenn genügend lange Tage vergangen sind. Die Addition vergangener Abweichungen von der mittleren Tageslänge (24h) ist der Wert des "Falsch-Gehens", den die Zeitgleichung für den betroffenen Tag angibt.

Ellipse (1. Ursache)

In Abb.5 sind die Verkürzungen aus Ursache 1 zwischen 94. und 277.Tag des Jahres jeden 5.Tag mit einem Balken gekennzeichnet. Denkt man sich in die Lücken je 4 weitere Tages-Balken gezeichnet, so ist zwischen der Kurve des Ausdrucks (1) und der Null-Linie eine gefüllte Fläche entstanden. Sie stellt die Summe aller Verkürzungen in diesem Zeitraum dar (918sec), die der Sonnenuhr von grösstem Nachgehen (-7,65min) zu grösstem Vorgehen (+7,65min) verhilft. Letzteres zeigt die Kurve ZG1 die wegen (#1) eine Sinus-Linie ist. Weil die Steigung hier (Perioden-Mitte) positiv ist, handelt es sich um den **negativen Sinus**.

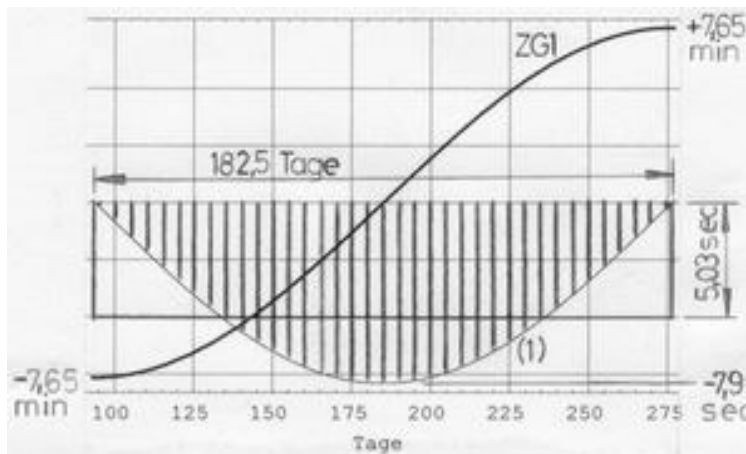


Abb.5 Sonnenuhr-"Vorgehen" an zu kurzen Tagen

Wie findet man die angegebenen Zahlen-Werte?

Anstatt auch nur die Hälfte (wegen Symmetrie) der über 180 Balken-Werte auszurechnen und anschliessend zu addieren, wird die Grösse der Fläche, die sie einnehmen, ermittelt. Das wäre eine typische Integrations-Rechnung, ist aber auch mit einer der beiden folgenden geometrischen Näherungen möglich. In Abb.6 ist eine Kurve M wie (1) von zwei weiteren Kurven K und G –alle mit Einheits-Amplitude unter der mit Bogenmass bemessenen Null-Linie– eingerahmt. Der Halbkreis hat die kleinere Fläche ($F_K = \pi/2$), die Halb-Ellipse ist der gestreckte Halbkreis mit der grösseren Fläche ($F_G = \pi^2/4$, Streckung im Verhältnis $\pi:2$). Der Mittelwert aus beiden kann als die gesuchte Fläche angenommen werden: $F_M = (F_K + F_G)/2 = 2,02$ (#9). Weiter wird mit dem runden Wert 2 gerechnet, der sich auch anbietet bei Näherung der gesuchten Fläche durch das Rechteck 2 mal 1, denn die beiden Eck-Flächen \otimes und \oplus erscheinen gleich gross (#10). Das schmale Ersatz-Rechteck hat folglich die "Amplitude" $2/\pi$. In der Fläche von Abb.5 ist die Amplitude nicht 1 sondern 7,9sec, die beim Rechteck zu 5,03sec ($7,9\text{sec} \cdot (2/\pi)$) wird. Die Fläche stellt also $5,03\text{sec} \cdot 182,5 = 918\text{sec} = 2 \cdot 7,65\text{min}$ dar, wie oben angegeben.

Die Amplitude (7,65 min) und die Phasenlage (negativer Sinus) des elliptischen Teils der Zeitgleichung sind somit gefunden. Die Teilgleichung lautet:

$$\mathbf{ZG1 = -7,65\text{min} \sin((d-3) 360^\circ/365)} \quad \mathbf{(1a)}$$

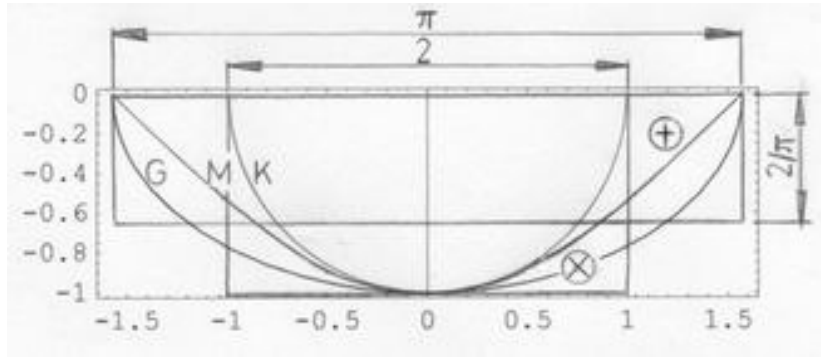


Abb.6 geometrische Näherung einer Cosinus-Fläche

Eklptik (2. Ursache)

Zum Vor- und Nachgehen der Sonnenuhr infolge Ursache 2 kommt man mit Überlegungen, die analog zu obigen sind. Die Cosinus-Kurve (2) mit Amplitude 20,3 sec und der Periode von 182,5 Tagen führt zur negativen Sinus-Kurve, der zweiten Teilgleichung

$$\mathbf{ZG_2 = -9,83min \sin ((d+10) 720^\circ/365);} \quad (2a)$$

wobei die Berechnung der Amplitude wie folgt lautet:

$$20,3sec \cdot (2/\pi) \cdot 91,25 = 1180sec = 2 \cdot \mathbf{9,83min} .$$

Zeitgleichung

Die Addition der beiden Teilgleichungen (1a) und (2a) ist die gesuchte Zeitgleichung. Sie lautet:

$$\mathbf{ZG = ZG_1 + ZG_2 = -7,65min \sin ((d-3) 360^\circ/365) - 9,83min \sin ((d+10) 720^\circ/365) .}$$

d ist die Zeit von 0 bis 365 (366 in Schaltjahren) Tage. Üblicherweise werden nur für einen Moment (12^h) eines Tages Werte ausgerechnet und als Näherung für den ganzen Tag benutzt. In die obige Gleichung ist d=0,5 (1. Januar, 12^h) usw. bis d=364,5 (365,5 in Schaltjahren, 31. Dezember) einzusetzen.

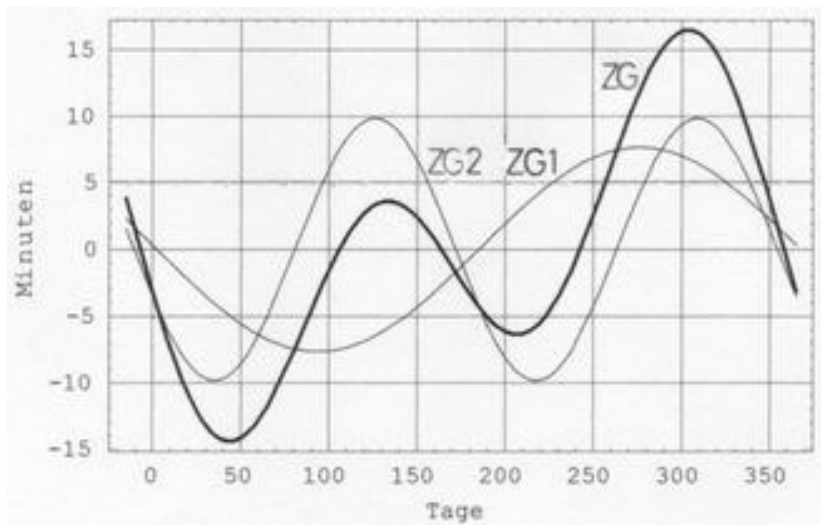


Abb.7 Zeitgleichung $ZG = ZG_1 + ZG_2$

Abb.7 zeigt die bekannte Zeitgleichungs-Kurve und deren beide Teilkurven. Weil die Teilkurven keinen gemeinsamen besonderen Punkt haben, gibt es in der Addition keine Symmetrie. Eine solche würde sich ergeben, wenn z.B. Perihel (für ZG_1) und Wintersonnenwende (für ZG_2) am gleichen Tage stattfänden. Dann hätten die beiden Hauptmaxima und die beiden Nebenmaxima in der Addition je gleiche Amplituden. Das war im Jahre 1246 so.

Die Amplituden der beiden Kurven in Abb.4 haben ungefähr das Verhältnis 1:2,5. In Abb.7 ist es aber nur noch ungefähr 1:1,25. Die Schwankung der Tageslänge aus Ursache 2 hat in der Zeitgleichung nämlich nur die proportional halbe Wirkung im Vergleich zu der aus Ursache 1, weil ihre

Periodenlänge nur halb so gross ist. Wegen unpassender Phasenlage der beiden Ursachen zueinander gibt es keinen Tag an dem sich deren Amplituden addieren, was in Abb.4 ca.28 sec, in Abb.6 ca.17,5 min ergäbe.

3.8.1.5. Genauigkeit von "elementaren" Zeitgleichungen

Die gefundene Zeitgleichung ist für den Gebrauch an Sonnenuhren über viele Jahre brauchbar, denn ihre Tageswerte weichen weniger als eine Minute von genauen über Jahrzehnte berechneten Mittelwerten ab. In der aus [3] entnommenen Tabelle sind einige mit ihr für ein Normaljahr berechneten Werte zum Vergleich eingetragen (Abb.8). Der Sonnenuhren-Freund möge sich aber an die Original-Tabelle [3] halten (ihre Werte praktischerweise auf volle Minuten runden) und sich nur zum Vergleich genauere "astronomische" Werte (s.3.8.2) berechnen. Dabei erhält er infolge des Schaltjahr-Rhythmus' ab dem fünften Jahr einen Tabellen-Satz, der sich nicht mehr als 1 Sekunde vom ersten unterscheidet. Also könnte man sogar bei erhöhten Ansprüchen mit einem Satz von 4 Tabellen auskommen, auch deshalb, weil Berechnungen in die weite Zukunft gar nicht so sicher sind. Sie beruhen auf heute bekanntem Wissen zu sehr langsamen Veränderungen im Himmel, die laufend beobachtet werden und von Zeit zu Zeit zur Änderung des genauen Rechenschemas führen.

Relevante Himmelserscheinungen (Perihel, Wintersonnenwende u.a.) verspäten sich über 1 Jahr ca.1/4 Tag. Ab dem Schalttag im vierten Jahr erscheinen sie folglich täglich ca.3/4 Tage früher. Diese Verschiebungen bewirken die grössten, aber praktisch immer noch nicht störenden Veränderungen (< 1/4 min) in der Zeitgleichung. Folgende Überlegung lässt den Gebrauch derart genauer Zeitgleichungs-Werte für eine Sonnenuhr sogar absurd erscheinen: In den Tabellen ist nämlich für einen Tag immer nur ein Wert (für Mittag, 12ⁿ) angegeben. Zu anderen Tageszeiten kann die reale Abweichung aber grösser sein als der Unterschied zur vorherigen oder nachfolgenden Jahrestabelle.

Die näherungsweise hergeleitete Zeitgleichung erfüllt ihren Zweck, den Verlauf übers Jahr zu zeigen und die richtige Grössenordnung (insbesondere der Extremwerte) anzugeben. Die Nulldurchgänge liegen manchmal 1 Tag daneben, was aber nicht heisst, dass die Genauigkeit hier schlechter wäre. Das ist nur auffälliger als bei den Tagen der Extremwerte und unschön, denn man wäre gern auf je einen "richtigen" Tag gekommen. Aber auch bei genauer Rechnung springen diese Daten im Schaltjahr-Rhythmus einen Tag hin und her.

Mittlere Zeitgleichung 1950 – 2050 (MEZ) in Minuten												
Tag	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1	- 3.5.1	- 13.6.3	- 12.4.13.0	- 3.9.4.6	2.9.7	2.2.3	- 3.8.5	- 6.3.2	x 0.0.1	10.3.9	x 16.4.5	11.0.10.5
2	- 3.9	- 13.7	- 12.2	- 3.6	3.0	2.1	- 4.0	- 6.2	0.3	10.6	16.4	10.6
3	- 4.4	- 13.8	- 12.0	- 3.3	3.1	1.9	- 4.2	- 6.2	0.6	11.0	16.4	10.2
4	- 4.8	- 13.9	- 11.7	- 3.0	3.2	1.7	- 4.4	- 6.1	1.0	11.3	16.4	9.8
5	- 5.3	- 14.0	- 11.5	- 2.7	3.3	1.6	- 4.5	- 6.0	1.3	11.6	16.4	9.4
6	- 5.7	- 14.1	- 11.3	- 2.4	3.4	1.4	- 4.7	- 5.9	1.6	11.9	16.4	9.0
7	- 6.2	- 14.1	- 11.1	- 2.2	3.5	1.2	- 4.9	- 5.8	2.0	12.2	16.3	8.6
8	- 6.6	- 14.2	- 10.8	- 1.9	3.5	1.0	- 5.0	- 5.6	2.3	12.4	16.2	8.1
9	- 7.0	- 14.2	- 10.6	- 1.6	3.6	0.8	- 5.2	- 5.5	2.7	12.7	16.2	7.7
10	- 7.4	- 14.2	- 10.3	- 1.3	3.6	0.6	- 5.3	- 5.3	3.0	13.0	16.1	7.2
11	- 7.8	- 14.2	- 10.0	- 1.1	3.6	0.4	- 5.5	- 5.2	3.4	13.2	16.0	6.8
12	- 8.2	- 14.2	- 9.8	- 0.8	3.7	0.2	- 5.6	- 5.0	3.7	13.5	15.9	6.3
13	- 8.6	- 14.2	- 9.5	- 0.5	3.7	0.0	- 5.7	- 4.9	4.1	13.7	15.7	5.8
14	- 9.0	x - 14.2.4	- 9.2	- 0.3	3.7	x - 0.2.0	- 5.8	- 4.7	4.4	14.0	15.6	5.4
15	- 9.3	- 14.1	- 9.0	- 0.1	x 3.7.7	- 0.4	- 5.9	- 4.5	4.8	14.2	15.4	4.9
16	- 9.7.2	- 14.1.4	- 8.7.5	0.2.2	3.7.6	- 0.6.4	- 6.0.5.8	- 4.3.3	5.1.9	14.4.9	15.2.4.9	4.4.2
17	- 10.0	- 14.0	- 8.4	x 0.4.0	3.6	- 0.9	- 6.1	- 4.1	5.5	14.6	15.0	3.9
18	- 10.3	- 14.0	- 8.1	0.6	3.6	- 1.1	- 6.2	- 3.8	5.8	14.8	14.8	3.4
19	- 10.7	- 13.9	- 7.8	0.9	3.6	- 1.3	- 6.3	- 3.6	6.2	15.0	14.6	2.9
20	- 11.0	- 13.8	- 7.5	1.1	3.5	- 1.5	- 6.3	- 3.4	6.6	15.2	14.4	2.4
21	- 11.3	- 13.7	- 7.2	1.3	3.4	- 1.7	- 6.4	- 3.1	6.9	15.4	14.1	1.9
22	- 11.5	- 13.5	- 6.9	1.5	3.4	- 2.0	- 6.4	- 2.9	7.3	15.5	13.9	1.4
23	- 11.8	- 13.4	- 6.6	1.7	3.3	- 2.2	- 6.5	- 2.6	7.6	15.7	13.6	0.9
24	- 12.0	- 13.3	- 6.3	1.9	3.2	- 2.4	- 6.5	- 2.4	8.0	15.8	13.3	0.5
25	- 12.3	- 13.1	- 6.0	2.0	3.1	- 2.6	- 6.5	- 2.1	8.3	15.9	13.0	x 0.0 -1
26	- 12.5	- 12.9	- 5.7	2.2	3.0	- 2.8	- 6.5	- 1.8	8.7	16.0	12.7	- 0.5
27	- 12.7	- 12.8	- 5.4	2.4	2.9	- 3.0	x - 6.5.4	- 1.5	9.0	16.1	12.4	- 1.0
28	- 12.9	- 12.6	- 5.1	2.5	2.8	- 3.2	- 6.5	- 1.2	9.3	16.2	12.1	- 1.5
29	- 13.1	(- 12.5)	- 4.8	2.7	2.6	- 3.4	- 6.5	- 0.9	9.7	16.3	11.7	- 2.0
30	- 13.3	0.0	- 4.5	2.8	2.5	- 3.6	- 6.4	- 0.6	10.0	16.3	11.4	- 2.5
31	- 13.4	0.0	- 4.2	0.0	2.4	0.0	- 6.4	- 0.3	0.0	16.4	0.0	- 3.0

Abb.8 Zeitgleichungs-Tabelle [3]

3.8.1.6. Literatur

- [1] R.P.Feynman: "Die Bewegung der Planeten um die Sonne" in D.L. und J.R.Goodstein: "Feynmans verschollene Vorlesung", 1998 Piper
 [2] S.Wetzel: "Die Physik der Sonnenuhr", Schriften der Freunde alter Uhren, 1998
 [3] H.-S.Klausmann: "Die mittlere Zeitgleichung über 100 Jahre", Schriften der Freunde alter Uhren, 1990

3.8.1.7. Anmerkungen

Anmerkung 1: Sind die Schwankungen beide Male $\ll 1$, was erwartet werden darf, so erscheinen sie im Ergebnis in Näherung als Summe. Man multipliziere z.B.
 $1,05 * 1,10 = 1,155 \approx 1,15 = 1 + (0,05 + 0,10)$.

Anmerkung 2: Von der exakten binomischen Reihe ist nur der letzte Summand $\pm \Delta t^2$ weggelassen (#4). Man quadrierte z.B.
 $1,1^2 = 1,21 = (1 + 0,1)^2 \approx (1 + 2 * 0,1) = 1,2$.

Dann das Reziproke (#5):
 $1 / (1 + 0,1)^2 = 0,826.. \approx (1 - 2 * 0,1) = 0,8$, was auch noch annehmbar wäre, obwohl man 0,1 noch nicht als deutlich $\ll 1$ bezeichnen kann.

Anmerkung 3: Vernachlässigt wird dabei, dass Sommer- und Winter-Halbjahr wegen der elliptischen Bahn nicht genau gleich lang sind.

Anmerkung 4: Das exakte, etwas weniger *elementare* Vorgehen beachtet, dass es sich um sphärische Dreiecke handelt. Wenn man diese halbiert (Abb.2), entstehen rechtwinklige sphärische Dreiecke mit relativ kurzen Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_{\max}/2) &= \sin(\omega_0/2) / \sin(90^\circ - \varepsilon) = \\ \sin(\omega_0/2) / \cos \varepsilon, \\ \tan(\omega_{\min}/2) &= \tan(\omega_0/2) \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit der Winkel ω und ω_0 darf deren Sinus und Tangens durch den Winkel (Bogenmass) selbst ersetzt werden. Das führt auf anderem Wege zu den bereits benutzten Näherungen (#7, #8).

Anmerkung 5: Eleganter aber nicht *elementar* wäre, den Ausdruck (1) zu integrieren:

$$\begin{aligned} 7,9 \text{sec} \int \cos((d-d_1)2\pi/365) \, dd &= \\ (7,9 * 365 / 2\pi) \text{sec} \sin((d-d_1)2\pi/365) &= \\ 7,65 \text{min} \sin((d-d_1)360^\circ/365). \end{aligned}$$

Bei Ausführung der Integration musste auf Bogenmass (2π anstatt 360°) gewechselt werden, weil sonst anstatt $365/2\pi$ ein falscher Integrationsfaktor entstanden wäre. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenfestlegung bei der Zeitgleichung lautet das Ergebnis:

$$(1a) \quad ZG_1 = -7,65 \text{min} \sin((d-d_1)360^\circ/365).$$

Anmerkung 6: Die von einer reinen Sinus- oder Cosinus-Halbwelle begrenzte Fläche ist tatsächlich genau 2, wie folgendes bestimmte Integral zeigt:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \sin(3\pi/2) - \sin(\pi/2) = -2$$

Das negative Vorzeichen deutet an, dass die Fläche unterhalb der Null-Linie liegt.

3.8.2 "Astronomische" Berechnung der Zeitgleichung

Die Darstellung im Original-Handbuch (Abschnitt 3.4) ist Rezept-artig gehalten. Die Zuordnung zwischen Rechenschritten und verursachenden Effekten ist nicht erkennbar. Deshalb weiche ich hier stark vom Original ab und baue meinen älteren Artikel "**Die Zeitgleichung für Nicht-Astronomen**" ein. Die übernommenen Bilder werden vorläufig als "Abbildungen" in eigener Nummerierung bezeichnet. Auch die Nummerierung von Gleichungen und Anmerkungen ist vorläufig übernommen.

Einige DGC-Ausführungen im Abschnitt 3.2.1 (vorwiegend Formeln auf Seiten 38 und 40 und Zusammenfassung in 3.2.3) haben mit der ZG zu tun. Müssen diese noch "untergebracht" werden?

3.8.2.1 Vorgehen

Zum Verständnis der Zusammenhänge, die zur Zeitgleichung führen, muss vom heliozentrischen Weltbild ausgegangen werden. Bei geozentrischer Betrachtung ist die erste Ursache, nämlich die Bahnfahrt der Erde auf einer Ellipse nicht erkennbar und quantitativ nicht beschreibbar. Mit Hilfe des 2. *Kepler'schen* Gesetzes (gleiche Flächen in gleichen Zeitintervallen) ist die Zeitfunktion des Ortes der Erde auf ihrer Bahn, die sogenannte wahre Anomalie zu gewinnen. Letztere ist nach dem Wechsel zu geozentrischer Betrachtung auf einfache Weise als ekliptikale Länge der Sonne in Abhängigkeit von der Zeit zu deuten. Der Systemwechsel bedeutet nämlich, dass die Sonne an die Stelle der Erde tritt.

Der ekliptikalen Länge der Sonne entspricht im Koordinatensystem des Äquators ihre Rektaszension $\alpha(t)$. Das ist der Subtrahend in der Zeitgleichung, die wie folgt lautet:

$$ZG(t) = 4 * (\alpha_M(t) - \alpha(t)) \text{ [min]}. \quad (1)$$

Der Minuend ist $\alpha_M(t)$, ist die Rektaszension der gedachten, gleichmässig übers Jahr auf dem Äquator umlaufenden mittleren Sonne (s.3.2). Bei einer Winkel-Differenz ($\alpha_M - \alpha$) von 360° hätte die Zeitgleichung einen Wert von 24 Stunden. 1° entspricht somit 4 Minuten.

Mit wahrer und mittlerer Ortszeit (s.3.3) lautet die Zeitgleichung:

$$ZG = \text{WOZ} - \text{MOZ}.$$

Hier ist MOZ der Subtrahend, weil Stundenwinkel (s.2.3.3.3) und Rektaszension (s.2.3.3.4) entgegengesetzten Drehsinn haben.

3.8.2.2 Heliozentrische Betrachtung (Abb.2)

Jahrestrieb der kosmischen Uhr ist vorerst die Erde, deren Fahrt auf ihrer elliptischen Bahn zu verfolgen ist. Mittelpunkt der Ellipse ist 0. In einem ihrer beiden Brennpunkte (B) befindet sich die Sonne. Perihel (P), Aphel (A) und Frühlingspunkt (F) sind annähernd fixe, besondere Bahnpunkte. X ist der Ort der Erde in einem bestimmten Moment t im Jahr, ausgedrückt durch den Winkel wahre Anomalie $V(t)$. Pendant zur mittleren Sonne ist die mittlere Erde, die sich bei Y befindet und mit der mittleren Anomalie $M(t)$ angegeben ist. Im Allgemeinen wird mit $M(t)$ der gleichmässige Ablauf der Zeit sichtbar gemacht. Y ist die Spitze eines Vergleichs-Zeigers für denjenigen Zeiger, der mit der wahren Erde bei X verbunden ist und nicht gleichmässig dreht.

Beide Erden passieren gleichzeitig das Perihel (P, Beginn des anomalistischen Jahres J_{an}) und das Aphel. Kurz vor P (bei K) beginnt das Kalenderjahr.

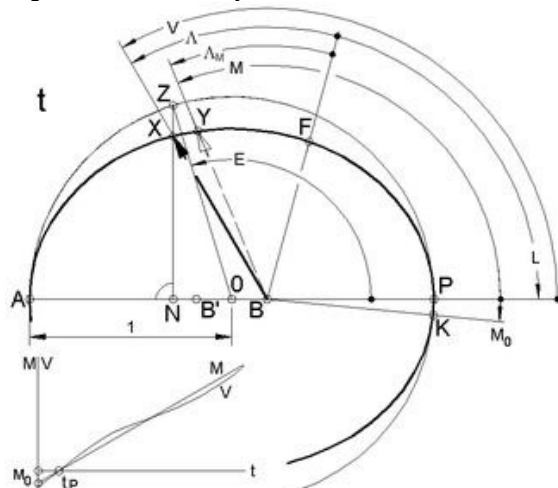


Abb.2 Erdbahn-Ellipse

Die mittlere Anomalie $M(t)$ ist definitionsgemäss eine lineare Funktion der Zeit t (Abb.2, links unten) und lautet:

$$M(t) = M_0 + (360^\circ/J_{an}) t. \quad (2)$$

Die Steigung ist $360^\circ/J_{an}$. Beim Perihel-Durchgang ist $M(t)=0$ definiert. Weil aber bei der Zeitgleichung (1) $t=0$ am 1. Januar, 12 Uhr gesetzt wird, ist M_0 (negativer Wert !) zu addieren. M_0 ist die Winkeldifferenz zwischen K und P. Diese Differenz ist eine Jahreskonstante, die deutlich nur innerhalb eines Schaltjahr-Zyklus' variiert. Die Veränderlichkeit ist überhaupt nur von Bedeutung, wenn man die an sich "zeitlose" Zeitgleichung nach einem oder mehreren Jahren neu berechnet.

Der Zusammenhang zwischen wahrer und mittlerer Anomalie wird nach einem Zwischenschritt erkennbar, nämlich nach der Einschaltung der *Kepler'schen* Gleichung, der von *Kepler* selbst vorgenommenen mathematischen Formulierung seines 2. Gesetzes:

$$M(t) = E(t) - (180^\circ/\pi)e \cdot \sin E(t) \quad (3) \quad (\text{Anhang 2}).$$

Dabei ist E ebenfalls eine Anomalie, nämlich die exzentrische. Man beachte, dass dieser Zeiger seinen Drehpunkt im Zentrum O der Ellipse hat, von *Kepler* dennoch exzentrische Anomalie genannt wurde (Abb.2). Gleichung (3) nach $E(t) = f(M(t))$ aufzulösen, ist in geschlossener Form nicht möglich. Es gelingt aber z.B. mit Hilfe des bekannten *Newton'schen* Näherungsverfahrens, das jener für diesen Zweck erfand, und das zu einem wichtigen Verfahren der numerischen Mathematik wurde.

$V(t) = f(E(t)) \{=f(M(t))\}$ ist dagegen ein einfacher geometrischer Zusammenhang innerhalb der Ellipse, wobei vom Mittel- (O) zum Brennpunkt (B) zurück gekehrt wird:

$$\tan(V(t)/2) = \kappa \tan(E(t)/2) \quad (4) \quad (\text{Anhang 3}).$$

κ ist eine Ellipsen-Konstante, ausgedrückt mit der relativen (numerischen) Exzentrizität e der Ellipse:

$$\kappa = ((1+e)/(1-e))^{1/2}$$

Der Graph $V(t)$ deckt sich erwartungsgemäss nicht mit $M(t)$ (Abb.2, links unten). Die **erste Ursache** der Zeitgleichung ist nunmehr berücksichtigt.

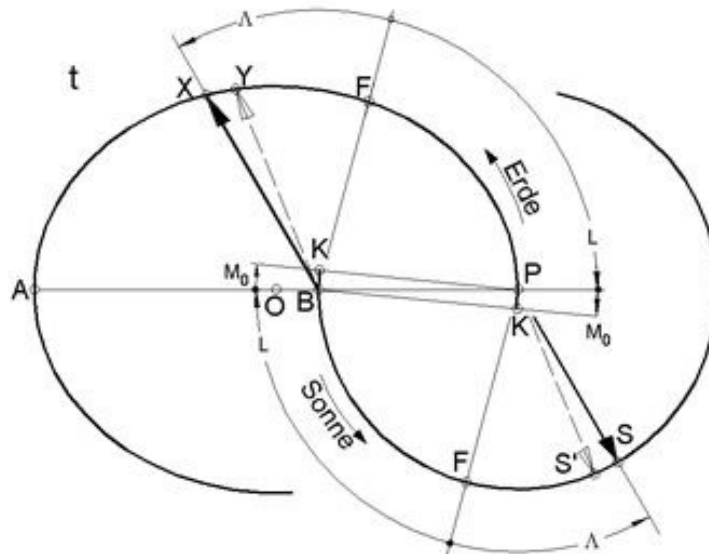


Abb.3 Erdbahn-Ellipse und Sonnenbahn-Ekliptik

3.8.2.3 Übergang zum geozentrischen Weltbild (Abb.3)

Abb.3 zeigt, was jeweils ein Sonnen- und ein Erdbewohner (Erde nicht drehend gedacht) sehen kann. Die Beobachtungen beginnen beim Periheldurchgang der Erde. Von der Sonne aus sieht man die Erden nach links laufen, den Frühlingspunkt (F) passieren und die Orte Y und X zum Zeitpunkt t erreichen. Der bis X überstrichene Winkel ist $V = \Lambda - L$. (Abb.2, L hat negativen Wert !). Der Erdenbewohner sieht die gleiche Bewegung, nur sind ihr die wahre und die mittlere Sonne S' unterworfen. Diese laufen ebenfalls nach links über F hinaus bis zu S' und S . Die Winkelvergrößerung bis S ist wieder $\Lambda - L$. Anstatt den Ort der wahren Erde mit $V(t)$ auf das Perihel (P) zu beziehen, erfolgt der Bezug aus praktischen Gründen neu auf den Frühlingspunkt (F), was geozentrisch gesehen zur ekliptakalen Länge Λ der wahren Sonne führt:

$$\Lambda(t) = V(t) + L(t). \quad (5)$$

$V(t)$ kommt aus Gleichung (4). $L(t)$ ist die ekliptikale Länge des Perihels, die sich schwach auch während des Jahres verändert. Das Perihel nähert sich dem Frühlingspunkt mit

$$L(t) = L_0 + (pf/J_{tr}) t. \quad (6)$$

Das Zusammenrücken beträgt $pf \approx 0,017^\circ/J_{tr}$. Es wird von der Kreisbewegung der Erdachse und der Drehung der Apsidenlinie der Erdbahn verursacht (s.2.2.4). Mit den Längen des tropischen Jahres J_{tr} und dem anomalistischen Jahr J_{an} ist:

$$pf = 360^\circ(1 - J_{tr}/J_{an}).$$

In Abb.3 ist die Sonnenbahn ausdrücklich als Kreis gezeichnet. Es handelt sich um die Ekliptik (s. auch Abb.4). Die Sonne ist zum Jahrestrieb geworden. Die Zeiger der kosmischen Uhr haben ihre Spitzen jetzt bei S und S'. An dieser Stelle sei erinnert, dass sich beide Zeiger und die Ekliptik-Ebene zusätzlich täglich einmal um die Himmelsachse drehen (Tagestrieb).

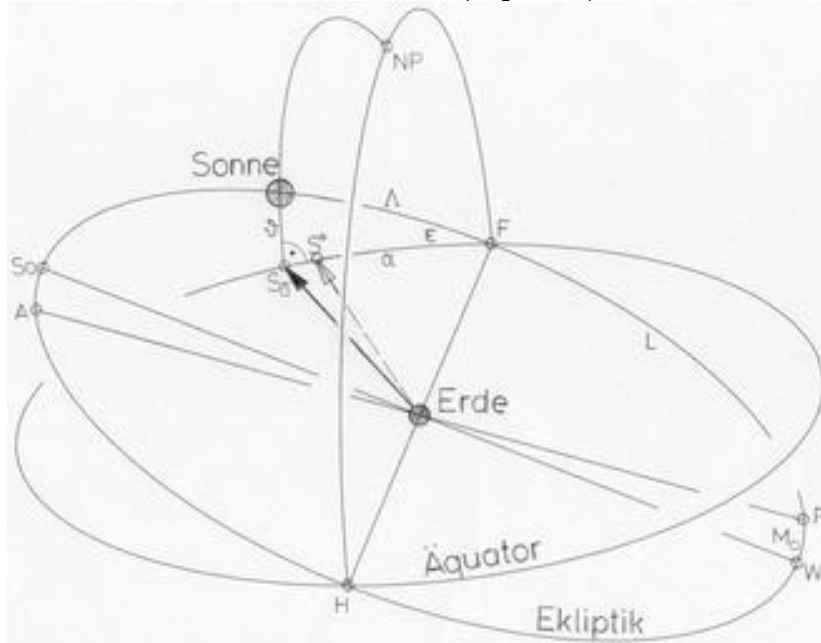


Abb.4 Ekliptik und Himmels-Äquator

3.8.2.4 Geozentrische Betrachtung (Abb.4)

Der Tagesrhythmus mit Tag-Nacht-Wechsel ist ausschliesslich Folge der Eigendrehung der Erde. Kosmisches Mass für die Tageszeit ist der Stundenwinkel (s.2.3.3.3), der als Bogen auf dem Äquator sichtbar wird. Deshalb ist in der Zeitgleichung der Ort der wahren Sonne auch als Winkelkomponente in der Äquatorebene zu verrechnen. Aus der ekliptikalen Länge Λ ist die Rektaszension α zu bestimmen. Das ist die Folge der **zweiten Ursache** der Zeitgleichung. Mit bekannten Transformations-Gleichungen (s.2.3.3.5) ergibt sich Folgendes:

$$\sin\delta(t) = \sin\Lambda(t) \sin\epsilon \quad (7)$$

$$\alpha(t) = \arccos(\cos\Lambda(t)/\cos\delta(t)). \quad (7a)$$

Eine äquatoriale Sonnenuhr zeigt das der Erddrehung überlagerte $\alpha(t)$ als Stundenwinkel an (s.2.3.4.1). In Abb.4 befindet sich die Zeigerspitze der kosmischen Uhr senkrecht unter der wahren Sonne auf dem Äquator. Man stelle sich an der Spitze einen zur Himmelsachse parallelen Querstab vor, an den die Sonne stösst und den Zeiger mit sich schleppt.

Gleichung (7a) liefert den Subtrahend von (1). Der Minuend $\alpha_M(t)$ wird im Folgenden bestimmt.

Die mittlere Rektaszension $\alpha_M(t)$ ist wie die mittlere Anomalie $M(t)$ ein Vergleichs-Zeiger. Der α_M -Zeiger befindet sich neben dem wahren Zeiger in der Äquatorebene mit der Erde als Drehpunkt. Sein äusseres Ende ist der als mittlere Sonne (s.3.2) bezeichnete fiktive Punkt S". Die Gleichung der mittleren Rektaszension ähnelt der der mittleren Anomalie (2):

$$\alpha_M(t) = \alpha_0 + (360^\circ/J_{tr}) t. \quad (8)$$

Die Rektaszension wird aber vom Frühlingspunkt (F) aus gemessen. Ihre Vergrößerung um 360° dauert ein tropisches Jahr (J_{tr}). Das ist der Unterschied zu Anomalien, die aufs Perihel (P) bezogen sind und in einem anomalistischen Jahr (J_{an}) einmal umlaufen.

Durch Wahl der Konstante α_0 in Gleichung (8) lässt sich die mittlere Sonne (S'') relativ zur wahren Sonne so platzieren, dass die Zeitgleichungs-Differenz (1) klein bleibt. Das wird erreicht, wenn S'' den Frühlingspunkt (F) gleichzeitig mit S' passiert.

Alle Vergleichszeiger repräsentieren den gleichmässigen Ablauf der Zeit. Deshalb legen sowohl S'' als auch S' zwischen $t=0$ und ihrem Zusammentreffen bei F einen Bogen derselben Länge α_0 zurück. Für den Weg von S' zwischen K und F lässt sich aus Abb.3 die Summe M_0+L ablesen. Darin ist $L=L_0$, die ekliptikale Länge des Perihels im Moment $t=0$ (Gleichung (6)). Also ist $\alpha_0 = M_0+L_0$ und aus (8) wird:

$$\alpha_M(t) = M_0 + L_0 + (360^\circ/J_{tr}) t \quad (9)$$

mit $\alpha_M(t=0) = \alpha_0 = M_0 + L_0$. Zur Erinnerung: M_0 und L haben negative Werte.

Mitunter wird S' (resp. die fiktive Erde Y) selbst als Vergleichszeiger verwendet. Deren ekliptikale Länge Λ_m ist zu jeder Zeit gleich der Rektaszension α_M von S'' (Anhang 4). Dabei hält man sich aber nicht klar an die Zeitgleichungs-Definition, die z.B. lautet: "Die Differenz mittlere Sonnenzeit minus wahre Sonnenzeit oder Rektaszension der wahren Sonne minus Rektaszension der mittleren Sonne heisst Zeitgleichung" [4], und es leidet die Anschaulichkeit (Zeiger und Vergleichszeiger nicht mehr in derselben Ebene).

3.8.2.4 Die Zeitgleichung über ein Jahr und mehr

Die Graphen von Minuend und Subtrahend der Zeitgleichung sind wie die beiden Linien in Abb.2 (links unten) stetig ansteigend, was auf den ersten Blick nicht auf eine Jahres-Periodizität hinweist. In der Gleichung ist t in Tagen einzusetzen. Sie beginnt im Zeitpunkt $t=0$ am 1.Januar 12ⁿ mittags in dem Jahr, dessen Jahres-Konstanten M_0 und L_0 in ihr enthalten sind, und kann viele Jahre lang benutzt werden. Der Zeitpunkt $t=364$ (365 in einem Schaltjahr) ist der Mittag des 31.Dezember im ersten Jahr, $t=365$ (366) ist der 1.Januar des nächsten Jahres usw. Man kann die Gleichung für jeden t -Wert, also über Jahre hinweg benutzen. Die in Abb.5 erkennbare Periodizität bezieht sich bestenfalls auf das tropische Jahr J_{tr} . Wegen der Annäherung zwischen Frühlingspunkt und Perihel (s.2.2.4) ändert sich die Kurvenform aber langfristig. Innerhalb einer Schaltjahrperiode sind die Werte von Kalenderjahr zu Kalenderjahr auf der Zeitachse 3 mal ca.1/4Tag vor-, am Ende ca.3/4Tag zurück verschoben, was in der Jahreskonstante M_0 steckt. Im fünften Jahr ist die Kurve der vom ersten Jahr sehr ähnlich.

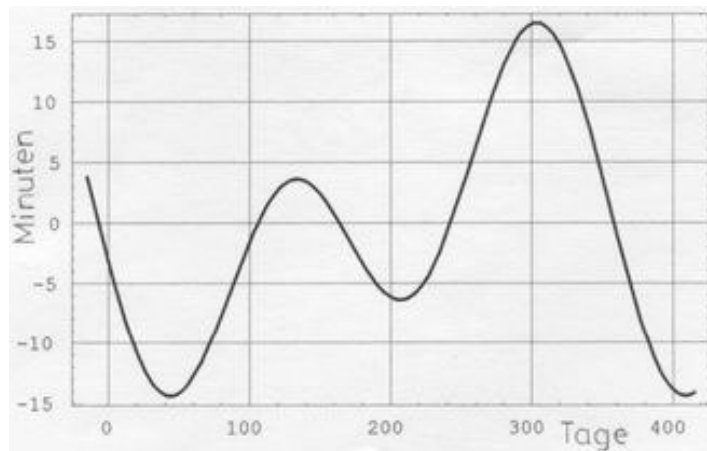


Abb.5 Zeitgleichung als Graph

Für einige wissenschaftlich/technische Anwendungen der Zeitgleichung wird sie noch genauer als hier beschrieben berechnet. Die erste höheren Stufe ist die Ermittlung einer neuen Gleichung ab 1.Januar des nächsten Jahres mit Hilfe anderer Jahres-Konstanten M_0 und L_0 und sich sehr langsam ändernde Werten für Jahreslängen J_{tr} und J_{an} , relative (numerische) Exzentrizität e der Erde und Schiefe der Ekliptik ϵ . Dabei können die auf astronomischen Messungen beruhenden Prognosen in der Zwischenzeit verbessert worden sein (gilt auch für M_0 und L_0).

Solare Basis-Werte: Nur erste 4 Spalten aus Tabelle 3-1 übernehmen.

3.8.2.5 Anhänge

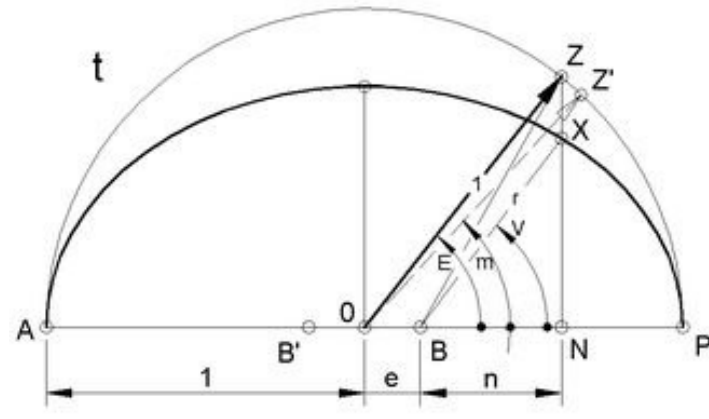


Abb.8 Ellipsen-Beziehungen

Anhang 2:

Kepler'sche Gleichung (Abb.8)

Die Kepler'sche Gleichung (3) verknüpft die beiden Anomalien E und M miteinander, zeigt also die Abweichung zwischen dem gleichmässig drehenden Zeiger M und dem zusätzlich oszillierendem Zeiger E an. Abb.8 enthält die Situation zu einem etwas früheren Zeitpunkt t und auf einer etwas flacheren Ellipse als Abb.2. Der Umkreis hat Einheits-Radius ($r=1$). Weil die mittlere Anomalie jetzt Bezugsgrösse zur exzentrischen ist, hat der Bezugszeiger seinen Drehpunkt auch in O. Die mittlere Anomalie wird hier $m(t)$ genannt, denn sie beginnt mit $t=0$ im Unterschied zu $M(t)$ bequemerweise im Perihel [6, Ziffer 486, b]. Das äussere Ende des Zeigers m ist der fiktive Punkt Z' . Die Gleichung (3) ist wie folgt zu finden:

Bei der Bewegung der Erde von P nach X überstreicht der in B entspringende Fahrstrahl die Fläche XBP. Ihr entspricht auf dem Umkreis die Fläche ZBP, die mit der exzentrischen Anomalie E (ein Winkel) und der numerischen Exzentrizität e (eine Strecke) ausdrückbar ist:

$$F_{ZBP} = F_{ZOP} - F_{ZOB}$$

F_{ZOP} ist der Kreissektor $(\pi/360^\circ)E$,

F_{ZOB} die Dreiecksfläche $(e/2)\sin E$.

$$F_{ZBP} = (\pi/360^\circ)E - (e/2)\sin E.$$

Gemäss zweitem Kepler'schem Gesetz sind die Verhältnisse zwischen überfahrenen Flächen und zwischen den dazu benötigten Zeiten gleich. Das steht in der Mitte des folgenden vierteiligen Ausdrucks:

$$F_{ZBP}/F_{Kreis} = F_{XBP}/F_{Ellipse} = t/J_{an} = m/360^\circ.$$

Der linke Teil enthält die Gleichheit entsprechender Flächenverhältnisse bei Ellipse und Umkreis, der rechte Teil die Gleichheit von Zeit- und Winkelverhältnis (mittlere Anomalie als lineare Funktion der Zeit). Die Auswertung aus 1. und 4. Bruch des Ausdrucks ergibt mit obigem F_{ZBP} und $F_{Kreis}=\pi$ unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit:

$$m(t) = E(t) - (180^\circ/\pi)e \cdot \sin E(t).$$

Wird $t=0$ am Anfang des Kalenderjahres angenommen, so ist lediglich $M(t)$ für $m(t)$ zu setzen. Die Zeitverschiebung gegen $m(t)$ ist in $M(t)$ mit M_0 berücksichtigt.

Die Kepler'sche Gleichung lautet somit

$$(3) \quad M(t) = E(t) - (180^\circ/\pi)e \cdot \sin E(t), \text{ qed.}$$

Anhang 3:

Von Anomalie E zu Anomalie V (Abb.8)

Die Polargleichung einer Ellipse mit Einheits-Umkreis, mit B als Pol, BP als Polarachse und V als Parameter lautet bekanntlich:

$$(10) \quad r = (1-e^2)/(1+e \cdot \cos V).$$

Die Strecke OB ist bei dieser Ellipse mit der relativen (numerischen) Exzentrizität identisch.

In anderer Schreibweise lautet die Polargleichung:

$$(11) \quad r(1+e \cdot \cos V) = (1-e^2).$$

Weiter mit einer Fleissarbeit in mehreren Schritten:

$$\text{Dreieck ONZ: } e + n = \cos E,$$

$$\text{Dreieck BNX: } n = r \cdot \cos V, \text{ Eliminieren von } n:$$

$$(12) \quad r \cdot \cos V = (\cos E - e),$$

$$(12) \text{ in } (11) \rightarrow (13) \quad r = (1-e \cdot \cos E),$$

$$(13) + (12) \rightarrow (14) \quad r(1 + \cos V) = (1-e)(1 + \cos E),$$

$$(13) - (12) \rightarrow (15) \quad r(1 - \cos V) = (1+e)(1 - \cos E),$$

$$(14)/(15) \rightarrow (16)$$

$$(1 + \cos V)/(1 - \cos V) = (1-e)(1 + \cos E)/((1+e)(1 - \cos E)).$$

Mit (2 Identitäten , s. in einer Formelsammlung)

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) \quad \text{und} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2(\alpha/2) \quad \text{zu:}$$

$$\sin^2(\alpha/2)/2 \cos^2(\alpha/2) = (1+e)/(1-e) \sin^2(\alpha/2)/\cos^2(\alpha/2),$$

$$(17) \quad \tan(V/2) = ((1+e)/(1-e))^{1/2} \tan(E/2).$$

Unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit und mit κ für den Wurzelausdruck ist das Gleichung

$$(4) \quad \tan(V(t)/2) = \kappa \tan(E(t)/2), \quad \text{qed.}$$

Anhang 4:

Umformung der Gleichung (9)

Die Verwendung von S' als Vergleichszeiger erinnert an die heliozentrische Wirklichkeit. S' repräsentiert Y, die fiktive Erde, deren ekliptikale Länge aus Abb.2 ablesbar ist: $\Lambda_M(t) = L(t) + M(t)$.

Mit $\Lambda_M(t) = \alpha_M(t)$ wird aus Gleichung (9):

$$\alpha_M(t) = L(t) + M(t).$$

Damit ist auch ein praktischer Vorteil verbunden, denn L(t) und M(t) wurden schon mit den Gleichungen (6) und (3) ausgerechnet.

Die jederzeitige Gleichheit $\Lambda_M(t) = \alpha_M(t)$ wurde durch die Kopplung von S'' an S' (Bestimmung der Konstante α_0) hergestellt.

3.8.2.6 Literatur

[4] "Physikalisches Wörterbuch" (Herausgeber Wilhelm H. Westphal), Verlag Springer, 1952

[6] R.Wolf: "Handbuch der Astronomie", Amsterdam 1973

3.9 Alphabetischer Teil

Abschnitt 3.5 aus Original-Handbuch bearbeitet übernehmen

Kap. 4 Funktion der Sonnenuhr

Dieses Kapitel wird den Hauptteil meines Handbuches ausmachen.

Stichworte, die den Unterschied zum DGC-Handbuch benennen:

- Theorie → Grundproblem
- Lösung → Lösung des Grundproblems
- allgemeinste Gleichungen der Schattenpunkte → "Faust"-Gleichungen für die Standard-Lagen der Zifferblätter
- Polstab anstatt Nodus → die Anwendung der allgemeinsten Gleichungen (s.o.) erscheinen mir dafür unpraktisch (Verdacht: Freude an mathematischen Zusammenhängen bei der DGC)
- analemmatische Sonnenuhr → meine alte Kritik: der Stab ist nur der geometrische Ort vieler Nodi, er ist keine Variante des Polstabs.
- astrolabische Sonnenuhr → wie anal. SU: insbesondere ist der verwendete Stab wesentlicher Bestandteil der SU, nicht lediglich eine Zusatzvorrichtung (eine Sonnenuhr ist immer mehr als ein Zifferblatt).
- Bifilar-Sonnenuhr → primär ist der Sonderfall: 15°-Intervalle der Stundenlinien. Wenn man die Nachteile bedenkt (große Schattenweite), nützt eine allgemeinste Darstellung (schließt alle denkbaren Lösungen ein) wenig.
- Höhen-Sonnenuhren → Hauptvorteil ist ihre Verwendung als tragbare Uhren, wobei aber die Sonnendeklination bekannt sein muss (deshalb "Nomogramm"-Sonnenuhren).
- Ozanam, Regiomontanus, Freeman → wenig praktische Bedeutung, fast nur gut für mathematische Übungen

4.1 Einteilung der Sonnenuhren

1. Sonnenuhr mit Schatten-werfendem Punkt
2. Sonnenuhr mit Polstab
3. Bifilar-Sonnenuhr
4. Analemmatische Sonnenuhr
5. Astrolabische Sonnenuhr
6. Höhen-Sonnenuhr
7. Sonderformen von Sonnenuhren

Kanononiale Sonnenuhren auch besprechen !



Die Sonnenuhr mit **Schatten-werfendem Punkt** ist die "kompletteste" aller Sonnenuhren, weil sie den ganzen Himmel fotografisch abbildet. Der Schatten-werfende Punkt (oder eine Lochblende) sind wie ein Foto-Objektiv das Zentrum der Projektion (Zentral-Projektion) des Himmels auf das Zifferblatt. Auf dem Zifferblatt ist aber nur der (veränderliche) Ort der Sonne sichtbar, weil diese die einzige Lichtquelle ist (insbesondere die einzige Quelle, die einen Schatten verursachen kann).

Vereinfacht man eine Fotolinse zu einer Zylinderlinse, so wird das Bild eindimensional. Parallel zur Zylinderachse enthält das Bild keinen Unterschied, nur dazu senkrecht variiert der Bildinhalt. Dem entspricht der Schatten eines Stabes. Befindet sich dieser in der Himmelsachse (**Polstab**), so ist der variierende Bildinhalt nur der Stundenwinkel der Sonne, die Information über ihre Deklination geht verloren. Diese Sonnenuhr ist die "Uhr-igste" aller Sonnenuhren, denn der linienförmige Schatten ist mit dem Uhr-Zeiger vergleichbar. Seine Richtung abzulesen ist einfacher als dem Punkt-Schatten obiger Sonnenuhren zu folgen (, deren jahreszeitliche Zusatzinformationen auf der mechanischen Uhr ja ebenfalls nicht übernommen sind).

Die **Bifilar**-Sonnenuhr hat wiederum eine Punkt-Anzeige. Dabei handelt es sich um den Kreuzungspunkt zweier Stab-Schatten.

Alle weiteren Sonnenuhren sind nicht "selbst-anzeigend". Die Deklination muss bekannt sein und vom Benutzer eingestellt werden.

Die **Analematische** und die **Astrolabische** Sonnenuhr benutzen einen Schattenstab, der nicht parallel zur Erdachse ist. Im Prinzip handelt es sich um Sonnenuhren mit Punkt-Anzeige. Dabei geht die Deklinations-Information verloren, ohne deren Kenntnis die Uhren gar nicht ablesbar sind. Der verwendete Stab enthält den über den Tag veränderlichen Schatten-werfenden Punkt, dem entsprechend ist nur ein Punkt des Stabschattens anzeigend.

Die **Höhen**-Sonnenuhr und ausgewählte **Sonderformen** verlangen vom Benutzer ausser der Kenntnis der Deklination das Anpeilen der Sonne, bevor die Tageszeit ablesbar ist.

4.1.1 Sonnenuhr mit Schatten-werfendem Punkt

4.1.2 Sonnenuhr mit Polstab

4.1.3 Bifilar-Sonnenuhr

4.1.4 Analematische Sonnenuhr

4.1.5 Astrolabische Sonnenuhr

4.1.6 Höhen-Sonnenuhr

4.1.7 Sonderformen von Sonnenuhren

Kapitel 5 zeichnerische Methoden

weglassen: wer die geometrischen Zusammenhänge kennt (ihre Vermittlung ist das eigentliche Ziel des Handbuchs), weiss, wie er ein Zifferblatt zu zeichnen hat; pure Rezepte, deren Hintergrund nicht deutlich wird, widersprechen dem Sinn des Handbuchs.

Enzyklopädische Kapitel 6 bis 10

Diese DGC-Kapitel enthalten am deutlichsten das Gedankengut und das umfangreiche Detailwissen ihrer Autoren, auf das ich gerne verweise. Sie lediglich abzuschreiben, kommt selbstverständlich nicht in Frage.

Anhänge

Formelzeichen und Symbole

Sonst keine (alles Wesentliche in den Texten selbst, auch Verweise auf meine und andere Einzelartikel)

26.2.11