Eine elementare Behandlung der Zeitgleichung

DGC-Mitteilungen Nr.109, 2007/ Chronométrophilia N° 62, 2007

Korrigenda: In der ersten der beiden Veröffentlichungen ist in den Gleichungen (2) und (2a) ein Teilungsfehler enthalten.

Inhalt

1.Einleitung

Der berühmte amerikanische Physiker *Feynman* hielt eine ungewöhnlichen Vorlesung für Studienanfänger mit dem auch für die Zeitgleichung bedeutsamen Titel "Die Bewegung der Planeten um die Sonne " [1]. Ungewöhnlich daran war, dass er den darin enthaltenen Ellipsen-Beweis elementar führte. Mit elementar meinte er, dass zum Verständnis wenig Vorwissen, allerdings Intelligenz nötig sei. Er leitete den Satz mit vorwiegend geometrischen Überlegungen her, denn Eleganz und Schönheit geometrischer Beweise spreche viele Menschen an. Nachteil sei, dass man anders als bei Verwendung höherer Mathematik mit Geduld viele Schritte machen müsse. *Feynman* ist Vorbild für die folgende Behandlung der Zeitgleichung. Der von ihm verwendete Begriff *elementar* wird ab jetzt kursiv geschrieben.

Die zu findende Zeitgleichung ist für den Gebrauch bei einer Sonnenuhr gedacht. Sie darf deshalb einige astronomische Tatsachen mit geringem Einfluss ausser Acht lassen. Und bei der Herleitung dürfen Vereinfachungen erfolgen. Die viel genauere, d.h. umfassendere und exaktere wissenschaftliche Bearbeitung erfährt nämlich beim "Hausgebrauch" – das ist seine Anwendung beim Ablesen einer gewöhnlichen Sonnenuhr – nicht die ihm zustehende Würdigung. Eine solche Uhr kann man nicht genauer als auf eine Minute ablesen.

Dass die Zeitgleichung nicht jährlich neu berechnet werden muss, wird von der Tatsache bestärkt, das viele Sonnenuhren mit deren Werten oder Kurven auf Dauer versehen sind. Geheimnis bleibt aber oft, wie man diese Werte oder Kurven berechnen kann. Im Folgenden wird das auf *elementar*e Weise gezeigt. Glücklicherweise lassen sich dabei einige Vereinfachungen machen, so dass die Zahl der Schritte nicht allzu gross und die Geduld beim Lesen nicht zu sehr beansprucht wird. Sollte dem Leser die eine oder andere Vereinfachung als zu riskant erscheinen, so hat er am Ende doch zu einer Zeitgleichung gefunden, die sich "mit blossem Auge" betrachtet nicht vom bekannten Ergebnis aus einer nicht *elementar*en wissenschaftlichen Arbeit unterscheidet. Einer solchen Arbeit zu folgen, hätte aber ein höheres Mass an Mathematik und – was gleich gewichtig ist – ziemlich viele astronomische Insider-Kenntnisse vorausgesetzt.

Was für die vorliegende Bearbeitung nicht *elementar* genug wäre, wird in den Anmerkungen am Schluss besprochen.

2. Zeitgleichungs-Ursachen

Nicht beachtet werden die sehr langsamen Veränderungen am Sonnenhimmel, wie Form und Lage der Erdbahn-Ellipse, Jahr-Länge(n), Neigung der Erdachse u.ä.. Ausgewertet werden die bekannten Ursachen für das "Falsch-Gehen" der Sonnenuhr. An diese sei kurz erinnert.

Die Erde muss sich pro Tag mehr als einmal um sich selbst drehen. Nach einer 360°-Drehhung ist erst ein Sterntag vollendet. Die (von der Sonne überstrahlten) Sterne stehen wieder am selben Ort (Süden, Meridian), die Sonne ist aber wegen der kurzen Bahnfahrt der Erde noch nicht dort angekommen. Deshalb muss sich die Erde zur Vollendung des Sonnentages noch ein Stück weiter drehen (Abb.1). Zwei Ursachen bewirken, dass das täglich unterschiedlich lange dauert.

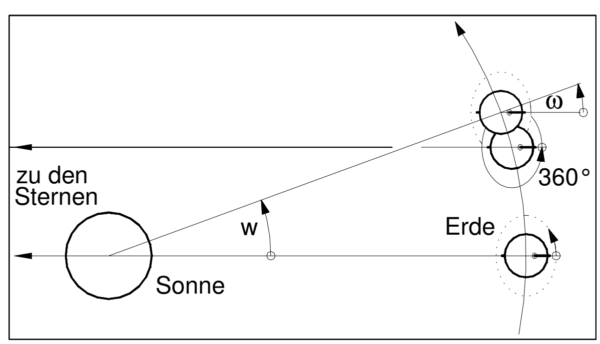

Abb.1 tägliche Drehung und Bahnfahrt der Erde

Ellipse (1. Ursache: variabler Bahnwinkel)

Auf der schwach elliptischen Erdbahn ist der Abstand der Erde zur Sonne variabel. In Sonnennähe führt die tägliche Bahnfahrt weiter als in Sonnenferne. Die Zusatzdrehung der Erde muss in einer Hälfte des Jahres grösser, in der anderen Hälfte kleiner sein, weshalb in diesen Zeiten der Tag länger bzw. kürzer als im Durchschnitt ausfällt.

Ekliptik (2. Ursache: variables Verhältnis zwischen Bahnwinkel und zusätzlichem Drehwinkel)

Die (im Weltraum fixe) Drehachse der Erde steht nicht senkrecht auf der Bahnebene wie in Abb.1 vereinfacht gezeichnet, weshalb sich das Verhältnis zwischen Bahnwinkel und zusätzlichem Drehwinkel täglich ändert. Befinden sich beide Achsen in einer Ebene (Sonnenwenden, Abb.2, links), ist der Zusatz-Drehwinkel grösser als der zu kompensierende Bahnwinkel. Wenn sie sich maximal kreuzen (Tag/Nacht-Gleichen, Abb.2, rechts), ist er kleiner. Die nicht konstante tägliche Bahnfahrt führt also nicht 1:1 zur täglichen Zusatzdrehung. In zwei Vierteln des Jahres ist das Verhältnis grösser, in den beiden Vierteln dazwischen kleiner mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Tageslänge.

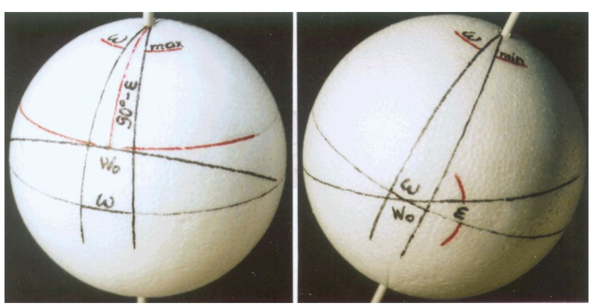

Abb.2 Winkelunterschiede zur Sonnenwende (links) und zur Tag/Nacht-Gleiche (rechts) [2]

3. Schwankung der Tageslänge in Sekunden

Schwankungen sind relative Angaben zu einer mittleren Grösse. Kleine (<<1) periodische Schwankungen lassen sich in guter Näherung (Näherung #1) mit einer Kreisfunktion (Sinus-, Cosinus-) beschreiben, für die dann nur Amplitude, Periodendauer und Nullpunkt zu bestimmen sind.

Die Wirkungen der beiden Ursachen wären eigentlich miteinander zu multiplizieren. Weil aber beide Schwankungen klein sind, erscheinen sie im Ergebnis in Näherung als Summe (#2, Anmerkung 1). Deshalb ist es möglich, beide Ursachen getrennt zu behandeln und erst am Schluss die Summe aus ihren Wirkungen zu bilden.

Ellipse (1. Ursache)

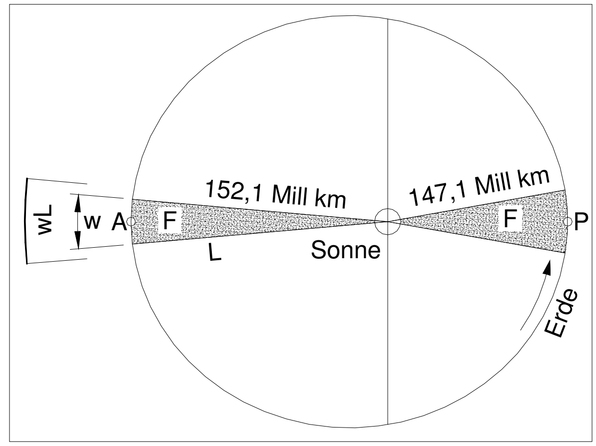

Abb.3 zweites *Keppler*'sches Gesetz

Das zweite *Keppler*'sche Gesetz lautet: Die Verbindungslinie L eines Planeten (die Erde ist einer) mit der Sonne überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleich grosse Flächen (Abb.3). Der hier zu betrachtende Zeitabschnitt ist der Tag, die Flächen F sind wesentlich kleiner (spitzer) als abgebildet. Die Länge L haben folgende Werte (mittlerer L_0, variabler L und relativer l):

L_0 (= $149{,}6 * 10^6$ km)

$L = L_0 \pm \Delta L$ (= $149{,}6*10^6$ km $\pm 2{,}5\ 10^6$ km)

$l = L/L_0 = 1 \pm \Delta L/L_0 = 1 \pm \Delta l$ (= 1 ± **0,0167**)

Der tägliche Bahnwinkel beträgt nur ca.1°
(pro Jahr eine ganze Bahnrunde =360°):
w_0 = 360°/365,2422Tage = **0,9856**°.

In der nächsten Zeile steckt folgende Näherung (#3): Bahnstück als Kreisbogen wL angenommen; bei ganzem Kreis käme man mit $2\pi L$ (Umfang) auf $F=\pi L^2$, die bekannte Kreisfläche.
$F = wL*L/2 = wL^2/2$ (w im Bogenmass, Abb.3).

Nun weiter
$w = 2F/L^2$,

und weiter
$w_0 = 2F/L_0^2$ (mittleres Dreieck).

Und nun relativ, also mit Schwankung:
$w/w_0 = L_0^2/L^2 = 1/l^2 = 1/(1\pm \Delta l)^2$.

Weil $\Delta l<<1$ sind zwei weitere Näherungs-Schreibweisen möglich (Anmerkung 2):
#4: $(1\pm \Delta l)^2 = (1\pm 2\Delta l)$.
#5: $1/(1\pm 2\Delta l) = (1 -(\pm 2\Delta l))$; Kehrwert, d.h. Vorzeichenwechsel.

Das besser lesbare ± wird im Folgenden beibehalten, weil (seine Negierung im PC nicht zu finden und) die richtige Vorzeichenzuordnung nicht fraglich ist. Neue Schreibweise:

$w/w_0 = 1 \pm 2\Delta l$.

Die Zeit T_1 für den täglichen Zusatz-Dreh der Erde schwankt wie ihr täglicher Bahnwinkel w:
$T_1/T_0 = 1 \pm \Delta t_1 = 1 \pm 2\Delta l = 1 \pm 0{,}0334$.

Mit T_0 = **236 sec** ($T_0 = 24\text{std} * w_0/(w_0 + 360°)$) ist
$\Delta T_1 = \Delta t_1\, T_0 =$ **± 7,9 sec** .

Der Tag ist in Perihelnähe (P) ca.8 sec länger als im Mittel und in Nähe des Aphel (A) ca.8 sec kürzer Seine **ganzjährige** Schwankung aus Ursache 1 lässt sich mit folgender Cosinus-Funktion beschreiben (#1, Anmerkung 3):
(1) 7,9sec cos ((d-d$_1$) 360°/365) (Abb.4).

d ist die Zeit von 0 (1.Jan. 0^h) bis 365 (31.Dez. 24^h) Tage, in Schaltjahren bis 366 Tage (Divisor ebenfalls 366). Der Nullpunkt ist ab Jahreswechsel um **d$_1$=3Tage** in die Zukunft verschoben. Das ist der Tag des Perihel-Durchgangs.

Ekliptik (2. Ursache)

Bei Ursache 1 bildet sich der (schwankende) Bahnwinkel w als Teil der Bahn auf dem Äquator ab. Er wird durch den dort zu messenden Drehwinkel ω eins zu eins kompensiert.: w = ω (Abb.1). Jetzt erscheint der (mittlere, #2) Bahnwinkel w_0 als Bogenstück eines Kreises auf der Erdoberfläche, der gegen den Äquator um ε geneigt ist (Abb.2). Zu ermitteln ist der zugehörige Drehwinkel ω, der ein Stück des Äquatorkreises ist. Wegen (#1) genügen Grösst- und Kleinstwert dieses Winkels.

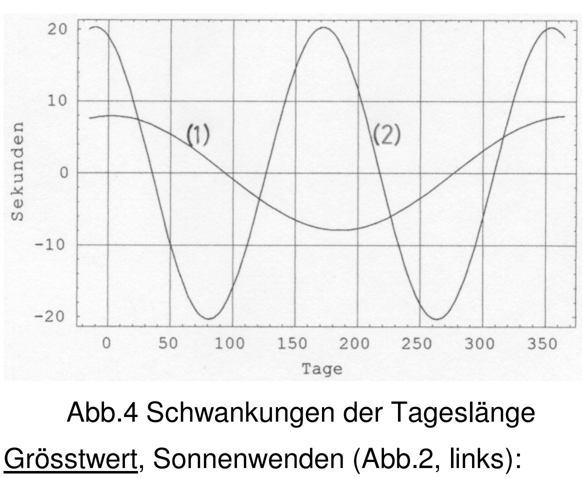

Abb.4 Schwankungen der Tageslänge

Grösstwert, Sonnenwenden (Abb.2, links):

Das w_0 entsprechende Bogenstück auf der Erde ist Teil eines Grosskreises (Ekliptik). Da es klein ist, darf dieser Kreis durch einen Kleinkreis (Wendekreis) ersetzt werden (#6). w_0 steht dann zu ω_{max} im gleichen Verhältnis wie die Radien von Klein- und Äquatorkreis,
das ist $w_0/\omega_{max} = \cos\varepsilon$.
$\omega_{max} = w_0/\cos\varepsilon$, mit $\varepsilon = 23{,}44°$ ist
ω_{max} = **1,07425°** .

Kleinstwert, Tag/Nacht-Gleichen (Abb.2, rechts):

Das sphärische Doppel-Dreieck aus w_0, ε und ω_{min} ist klein genug, dass es als ebenes Dreieck angesehen werden darf (#7). Mit ebener Trigonometrie heisst es $\cos\varepsilon = (\omega_{min}/2) / (w_0/2)$
$\omega_{min} = w_0 \cos\varepsilon$ = **0,90427°** .

Mit sphärischer Trigonometrie lassen sich die Werte exakt bestimmen (Anmerkung 4), man findet aber bei der gewählten Auflösung noch keinen Unterschied.

Die Verarbeitung der beiden Werte führt zum mittleren Wert $\omega_0 = 0{,}98926$.

$\omega = 0{,}98926 \pm 0{,}08499$,

$\omega/\omega_0 = 1 \pm \Delta\omega = 1 \pm$ **0,08591**.

Die Drehgeschwindigkeit der Erde ist konstant. Also schwankt die Tageslänge T_2 wie der Drehwinkel ω:
$T_2/T_0 = 1 \pm \Delta t_2 = 1 \pm \Delta\omega$

Mit T_0 = 236 sec ist
$\Delta T_2 = \Delta t_2\, T_0 =$ **± 20,3 sec** .

Der Tag ist an den Sonnenwenden ca.20 sec länger als im Mittel, an den Tag/Nacht-Gleichen ca.20 sec kürzer. Seine **halbjährige** Schwankung aus Ursache 2 lässt sich mit folgender Cosinus-Funktion beschreiben (#1):
(2) 20,3sec cos ((d-d$_2$) 360°/182,5) (Abb.4)

Von den beiden Sonnenwenden liegt die des Winters am nächsten beim Jahreswechsel. Der Nullpunkt ist um **d$_1$=-10Tage** in die Vergangenheit verschoben.

4. "Vor- und Nachgehen" der Sonnenuhr

Aus schon genannten Gründen können die Effekte getrennt voneinander behandelt werden, was vorläufig weiter geschehen soll.

Folgen beispielsweise Tage aufeinander, die zu kurz sind, so geht die Sonnenuhr schneller als die "Normaluhr" und eilt ihr schliesslich voraus. Sie geht erst wieder langsamer, wenn längere Tage folgen und beginnt nachzugehen, wenn genügend lange Tage vergangen sind. Die Addition vergangener Abweichungen von der mittleren Tageslänge (24 std) ist der Wert des "Falsch-Gehens", den die Zeitgleichung für den betroffenen Tag angibt.

Ellipse (1. Ursache)

In Abb.5 sind die Verkürzungen aus Ursache 1 zwischen 94. und 277.Tag des Jahres jeden 5.Tag mit einem Balken gekennzeichnet. Denkt man sich in die Lücken je 4 weitere Tages-Balken gezeichnet, so ist zwischen der Kurve des Ausdrucks (1) und der Null-Linie eine gefüllte Fläche entstanden. Sie stellt die Summe aller Verkürzungen in diesem Zeitraum dar (918sec), die der Sonnenuhr von grösstem Nachgehen (-7,65min) zu grösstem Vorgehen (+7,65min) verhilft. Letzteres zeigt die Kurve ZG1 die wegen (#1) eine Sinus-Linie ist. Weil die Steigung hier (Perioden-Mitte) positiv ist, handelt es sich um den **negativen Sinus**.

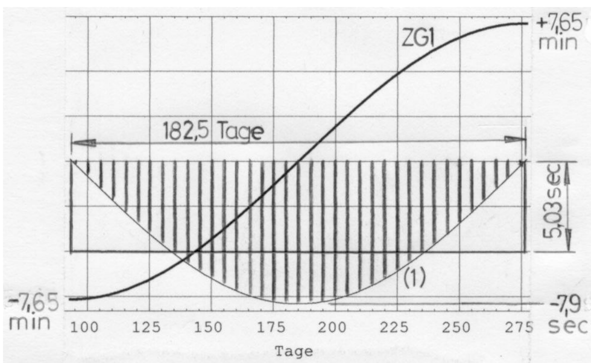

Abb.5 Sonnenuhr-"Vorgehen" an zu kurzen Tagen

Wie findet man die angegebenen Zahlen-Werte?

Anstatt auch nur die Hälfte (wegen Symmetrie) der über 180 Balken-Werte auszurechnen und anschliessend zu addieren, wird die Grösse der Fläche, die sie einnehmen, ermittelt, wozu eine geometrische Näherung (#8) dient (Anmerkung 5).

In Abb.6 ist eine Kurve M wie **(1)** von zwei weiteren Kurven K und G –alle mit Einheits-Amplitude unter der mit Bogenmass bemessenen Null-Linie– eingerahmt. Der Halbkreis hat die kleinere Fläche ($F_K=\pi/2$), die Halb-Ellipse ist der gestreckte Halbkreis mit der grösseren Fläche ($F_G=\pi^2/4$, Streckung im Verhältnis $\pi:2$). Der Mittelwert aus beiden kann als die gesuchte Fläche angenommen werden: $F_M = (F_K+F_G)/2 = 2{,}02$.

Weiter wird mit dem runden Wert 2 gerechnet, der sich auch anbietet bei Näherung der gesuchten Fläche durch das Rechteck 2 mal 1. Die beiden Eck-Flächen ⊗ und ⊕ scheinen gleich gross zu sein (Anmerkung 6).

Das schmale Ersatz-Rechteck hat folglich die "Amplitude" $2/\pi$. In der Fläche von Abb.5 ist die Amplitude nicht 1 sondern 7,9sec, die beim Rechteck zu 5,03sec (7,9sec$*(2/\pi)$) wird. Die Fläche stellt also 5,03sec$*$182,5 = 918sec = 2$*$**7,65min** dar, wie oben angegeben.

Die Amplitude (7,65 min) und die Phasenlage (negativer Sinus) des elliptischen Teils der Zeitgleichung sind somit gefunden. Die Teilgleichung lautet:

(1a) ZG1 = – 7,65min sin ((d-3) 360°/365)

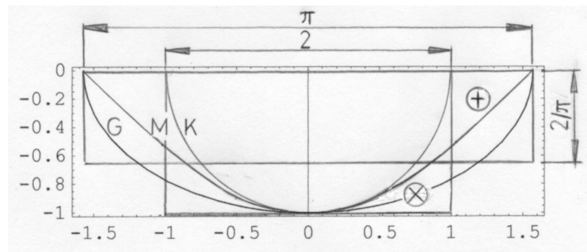

Abb.6 geometrische Näherung einer Cosinus-Fläche

Ekliptik (2. Ursache)

Zum Vor -und Nachgehen der Sonnenuhr infolge Ursache 2 kommt man mit Überlegungen, die analog zu obigen sind. Die Cosinus-Kurve (2) mit Amplitude 20,3 sec und der Periode von 182,5 Tagen führt zur negativen Sinus-Kurve, der zweiten Teilgleichung

(2a) ZG2 = – 9,83min sin ((d+10) 360°/182,5),

wobei die Berechnung der Amplitude wie folgt lautet:

20,3sec $(2/\pi)$ 91,25 = 1180sec = 2$*$**9,83min** .

Zeitgleichung

Die Addition der beiden Teilgleichungen **(1a)** und **(2a)** ist die gesuchte Zeitgleichung. Sie lautet:

ZG = ZG1 + ZG2 =
= – 7,65min sin ((d –3) 360°/365)
– 9,83min sin ((d+10) 360°/182,5) .

d ist die Zeit von 0 bis 365 (366 in Schaltjahren) Tage. Üblicherweise werden nur für einen Moment (12^h) eines Tages Werte ausgerechnet und als Näherung für den ganzen Tag benutzt. In die obige Gleichung ist d=0,5 (1.Januar,12^h) usw. bis d=364,5 (365,5 in Schaltjahren, 31.Dezember) einzusetzen.

Abb.7 zeigt die bekannte Zeitgleichungs-Kurve und deren beide Teilkurven. Weil die Teilkurven keinen gemeinsamen besonderen Punkt haben, gibt es in der Addition keine Symmetrie. Eine solche würde sich ergeben, wenn z.B. Perihel (für ZG_1) und Wintersonnenwende (für ZG_2) am gleichen Tage statt fänden. Dann hätten die beiden Hauptmaxima und die beiden Nebenmaxima in der Addition je gleiche Amplituden. Das war im Jahre 1246 so.

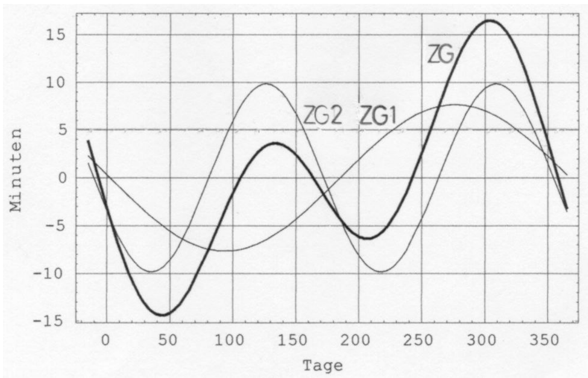

Abb.7 Zeitgleichung $ZG = ZG_1 + ZG_2$

Die Amplituden der beiden Kurven in Abb.4 haben ungefähr das Verhältnis 1:2,5. In Abb.7 ist es aber nur noch ungefähr 1:1,25. Die Schwankung der Tageslänge aus Ursache 2 hat in der Zeitgleichung nämlich nur die proportional halbe Wirkung im Vergleich zu der aus Ursache 1, weil ihre Periodenlänge nur halb so gross ist. Wegen unpassender Phasenlage der beiden Ursachen zueinander gibt es keinen Tag an dem sich deren Amplituden addieren, was in Abb.4 ca.28 sec, in Abb.7 ca.17,5 min ergäbe.

5. Genauigkeit von Zeitgleichungen

Die gefundene Zeitgleichung ist für den Gebrauch an Sonnenuhren über viele Jahre brauchbar, denn ihre Tageswerte weichen weniger als eine Minute von genauen über Jahrzehnte berechneten Mittelwerten ab. In der aus [3] entnommenen Tabelle sind einige mit ihr für ein Normaljahr berechneten Werte zum Vergleich eingetragen (Abb.8). Der Sonnenuhren-Freund möge sich aber an die Original-Tabelle [3] halten (ihre Werte praktischerweise auf volle Minuten runden) und sich nur zum Vergleich jährlich die besten Werte beschaffen [4]. Dabei erhält er infolge des Schaltjahr-Rhythmus' ab dem fünften Jahr einen Tabellen-Satz, der sich nicht mehr als 1 Sekunde vom ersten unterscheidet. Also könnte man sogar bei erhöhten Ansprüchen mit einem Satz von 4 Tabellen auskommen, auch deshalb, weil Berechnungen in die weite Zukunft gar nicht so sicher sind. Sie beruhen auf heute bekanntem Wissen zu sehr langsamen Veränderungen im Himmel, die laufend beobachtet werden und von Zeit zu Zeit zur Änderung des genauen Rechenschemas führen. Relevante Himmelserscheinungen (Perihel, Wintersonnenwende u.a.) verspäten sich über 1 Jahr ca.1/4 Tag. Ab dem Schalttag im vierten Jahr erscheinen sie täglich ca.3/4 Tage früher als im dritten Jahr. Diese Verschiebungen bewirken die grössten, aber praktisch immer noch nicht störenden Veränderungen (< 1/4 min) in der Zeitgleichung. Folgende Überlegung lässt den Gebrauch derart genauer Zeitgleichungs-Werte für eine Sonnenuhr sogar absurd erscheinen: In den Tabellen ist nämlich für einen Tag immer nur ein Wert (für Mittag, 12^h) angegeben. Zu anderen Tageszeiten kann die reale Abweichung aber grösser sein als der Unterschied zur vorherigen oder nachfolgenden Jahrestabelle.

Die *elementar* und näherungsweise hergeleitete Zeitgleichung erfüllt ihren Zweck, den Verlauf übers Jahr zu zeigen und die richtige Grössenordnung (insbesondere der Extremwerte) anzugeben. Die Nulldurchgänge liegen manchmal 1 Tag daneben, was aber nicht heisst, dass die Genauigkeit hier schlechter wäre. Das ist nur auffälliger als bei den Tagen der Extremwerte und unschön, denn man wäre gern auf je einen "richtigen" Tag gekommen. Aber auch bei genauer Rechnung springen diese Daten im Schaltjahr-Rhythmus einen Tag hin und her.

6. Literatur

[1] R.P.Feynman: "Die Bewegung der Planeten um die Sonne" in D.L. und J.R.Goodstein: "Feynmans verschollene Vorlesung", 1998 Piper

[2] S.Wetzel: "Die Physik der Sonnenuhr", Schriften der Freunde alter Uhren, 1998

[3] H.-S.Klausmann: "Die mittlere Zeitgleichung über 100 Jahre", Schriften der Freunde alter Uhren, 1990

[4] Deutsche Gesellschaft für Chronometrie: "Sonnenuhren Handbuch", Anhang auf CD, 2006

Januar 2008 (Jan.11 / März 11)
Siegfried Wetzel, CH 3400 Burgdorf
s.wet@gmx.net

Mittlere Zeitgleichung 1950 – 2050 (MEZ) in Minuten

Tag	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1	– 3.5.1	– 13.6.3	– 12.4 13.0	– 3.9 4.6	2.9.7	2.2.3	– 3.8.5	– 6.3.2	x 0.0.1	10.3.9	x 16.4.5	11.0 10.5
2	– 3.9	– 13.7	– 12.2	– 3.6	3.0	2.1	– 4.0	– 6.2	0.3	10.6	16.4	10.6
3	– 4.4	– 13.8	– 12.0	– 3.3	3.1	1.9	– 4.2	– 6.2	0.6	11.0	16.4	10.2
4	– 4.8	– 13.9	– 11.7	– 3.0	3.2	1.7	– 4.4	– 6.1	1.0	11.3	16.4	9.8
5	– 5.3	– 14.0	– 11.5	– 2.7	3.3	1.6	– 4.5	– 6.0	1.3	11.6	16.4	9.4
6	– 5.7	– 14.1	– 11.3	– 2.4	3.4	1.4	– 4.7	– 5.9	1.6	11.9	16.4	9.0
7	– 6.2	– 14.1	– 11.1	– 2.2	3.5	1.2	– 4.9	– 5.8	2.0	12.2	16.3	8.6
8	– 6.6	– 14.2	– 10.8	– 1.9	3.5	1.0	– 5.0	– 5.6	2.3	12.4	16.2	8.1
9	– 7.0	– 14.2	– 10.6	– 1.6	3.6	0.8	– 5.2	– 5.5	2.7	12.7	16.2	7.7
10	– 7.4	– 14.2	– 10.3	– 1.3	3.6	0.6	– 5.3	– 5.3	3.0	13.0	16.1	7.2
11	– 7.8	– 14.2	– 10.0	– 1.1	3.6	0.4	– 5.5	– 5.2	3.4	13.2	16.0	6.8
12	– 8.2	– 14.2	– 9.8	– 0.8	3.7	0.2	– 5.6	– 5.0	3.7	13.5	15.9	6.3
13	– 8.6	– 14.2	– 9.5	– 0.5	3.7	0.0	– 5.7	– 4.9	4.1	13.7	15.7	5.8
14	– 9.0	x – 14.2.4	– 9.2	– 0.3	3.7	x – 0.2.0	– 5.8	– 4.7	4.4	14.0	15.6	5.4
15	– 9.3	– 14.1	– 9.0	– 0.1	x 3.7.7	– 0.4	– 5.9	– 4.5	4.8	14.2	15.4	4.9
16	– 9.7.2	– 14.1.4	– 8.7 9.5	0.2.2	3.7.6	– 0.6.4	– 6.0 5.8	– 4.3.3	5.1.5	14.4.9	15.2 14.9	4.4.2
17	– 10.0	– 14.0	– 8.4	x 0.4.0	3.6	– 0.9	– 6.1	– 4.1	5.5	14.6	15.0	3.9
18	– 10.3	– 14.0	– 8.1	0.6	3.6	– 1.1	– 6.2	– 3.8	5.8	14.8	14.8	3.4
19	– 10.7	– 13.9	– 7.8	0.9	3.6	– 1.3	– 6.3	– 3.6	6.2	15.0	14.6	2.9
20	– 11.0	– 13.8	– 7.5	1.1	3.5	– 1.5	– 6.3	– 3.4	6.6	15.2	14.4	2.4
21	– 11.3	– 13.7	– 7.2	1.3	3.4	– 1.7	– 6.4	– 3.1	6.9	15.4	14.1	1.9
22	– 11.5	– 13.5	– 6.9	1.5	3.4	– 2.0	– 6.4	– 2.9	7.3	15.5	13.9	1.4
23	– 11.8	– 13.4	– 6.6	1.7	3.3	– 2.2	– 6.5	– 2.6	7.6	15.7	13.6	0.9
24	– 12.0	– 13.3	– 6.3	1.9	3.2	– 2.4	– 6.5	– 2.4	8.0	15.8	13.3	0.5
25	– 12.3	– 13.1	– 6.0	2.0	3.1	– 2.6	– 6.5	– 2.1	8.3	15.9	13.0	x 0.0 –.1
26	– 12.5	– 12.9	– 5.7	2.2	3.0	– 2.8	– 6.5	– 1.8	8.7	16.0	12.7	–0.5
27	– 12.7	– 12.8	– 5.4	2.4	2.9	– 3.0	x – 6.5.4	– 1.5	9.0	16.1	12.4	–1.0
28	– 12.9	– 12.6	– 5.1	2.5	2.8	– 3.2	– 6.5	– 1.2	9.3	16.2	12.1	–1.5
29	– 13.1	(–12.5)	– 4.8	2.7	2.6	– 3.4	– 6.5	– 0.9	9.7	16.3	11.7	–2.0
30	– 13.3	0.0	– 4.5	2.8	2.5	– 3.6	– 6.4	– 0.6	10.0	16.3	11.4	–2.5
31	– 13.4	0.0	– 4.2	0.0	2.4	0.0	– 6.4	– 0.3	0.0	16.4	0.0	–3.0

Abb.8 Zeitgleichungs-Tabelle [3]

7. Anmerkungen

Anmerkung 1: Sind die Schwankungen beide Male <<1, was erwartet werden darf, so erscheinen sie im Ergebnis in Näherung als Summe. Man multipliziere z.B.
$1{,}05*1{,}10 = 1{,}155 \approx 1{,}15 = 1+(0{,}05+0{,}10)$.

Anmerkung 2: Von der exakten binomischen Reihe ist nur der letzte Summand $\pm\Delta l^2$ weggelassen (#4). Man quadriere z.B.
$1{,}1^2 = 1{,}21 = (1+ 0{,}1)^2 \approx (1+ 2*0{,}1) = 1{,}2$.
Dann das Reziproke (#5):
$1 / (1+ 0{,}1)^2 = 0{,}826.. \approx (1- 2*0{,}1) = 0{,}8$, was auch noch annehmbar wäre, obwohl man 0,1 noch nicht als deutlich <<1 bezeichnen kann.

Anmerkung 3: Vernachlässigt wird dabei, dass Sommer- und Winter-Halbjahr wegen der elliptischen Bahn nicht genau gleich lang sind.

Anmerkung 4: Das exakte, etwas weniger *elementare* Vorgehen beachtet, dass es sich um sphärische Dreiecke handelt. Wenn man diese halbiert (Abb.2), entstehen rechtwinklige sphärische Dreiecke mit relativ kurzen Ausdrücken:
$\sin(\omega_{max}/2) = \sin(w_0/2) / \sin(90°-\varepsilon) =$
$\sin(w_0/2) / \cos\varepsilon$,
$\tan(\omega_{min}/2) = \tan(w_0/2)\cos\varepsilon$.
Wegen der Kleinheit der Winkel ω und w_0 darf deren Sinus und Tangens durch den Winkel (Bogenmass) selbst ersetzt werden. Das führt auf anderem Wege zu den bereits benutzten Näherungen (#6,#7).

Anmerkung 5: Eleganter aber nicht *elementar* wäre, den Ausdruck (1) zu integrieren:
$7{,}9\text{sec} \int \cos((d-d_1)2\pi/365)\, dd =$
$(7{,}9*365/2\pi)\text{sec}\, \sin((d-d_1)2\pi/365) =$
$7{,}65\text{min}\, \sin((d-d_1)360°/365)$.
Bei Ausführung der Integration musste auf Bogenmass (2π anstatt 360°) gewechselt werden, weil sonst anstatt $365/2\pi$ ein falscher Integrationsfaktor entstanden wäre. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenfestlegung bei der Zeitgleichung lautet das Ergebnis:
(1a) $ZG_1 = -7{,}65\text{min}\, \sin((d-d_1)360°/365)$.

Anmerkung 6: Die von einer reinen Sinus- oder Cosinus-Halbwelle begrenzte Fläche ist tatsächlich genau 2, wie folgendes bestimmte Integral zeigt:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \sin(3\pi/2) - \sin(\pi/2) = -2$$

Das negative Vorzeichen deutet an, dass die Fläche unterhalb der Null-Linie liegt.