



Ein Modell für die Ableitung der Analemmatischen Sonnenuhr aus der Äquatorialen Ring-Sonnenuhr (DGC-Jahresschrift, 2004)

Zusammenfassung

Für die Erklärung der Analemmatischen Sonnenuhr mit Hilfe einer Äquatorialen Ring-Sonnenuhr wird ein durch Verschieben veränderliches Modell verwendet. Durch die Verschiebung des Schatten-werfenden Punktes in den Schattenstab wird auch dessen Funktion anschaulich gemacht., was bisherige Autoren unterlassen.

Inhalt

1. Einleitung
2. Verwendung einer Ring-förmigen Äquatorialen Sonnenuhr
3. Schatten-Stäbe als gerade Reihen unendlich vieler Schatten-werfender Punkte
4. Der Begriff Projektion und der Vorgang Verschiebung
5. Anhang: Gleichungen der Schattenstab-Skala und der Verschiebung
6. Literatur

1. Einleitung

Es soll die Standard-Version der Analemmatischen Sonnenuhr, die vermutlich erstmals 1640/1644 von *Vaulezard* [1] beschrieben wurde, aus einer Äquatorialen Ring-Sonnenuhr, von der 1951/ 1953 auch *Terpstra* in seinen oft zitierten Überlegungen ausging, abgeleitet werden. Das älteste noch existierende Exemplar jener Sonnenuhr befindet sich vor der Kathedrale in Brou bei Bourg-en-Bresse in Frankreich. Bild 1 ist eine Fotografie dieser Uhr aus dem Jahre 1996, leider ohne Sonnenschein. Der Mittags-Schatten würde nach links oben fallen.

Terpstra stellt geometrische Überlegungen an und führt die Ableitung mit **Projektion** durch. Für den Schatten-Stab der Analemmatischen Sonnenuhr findet er so aber nur den veränderlichen Fuss-Punkt. Die Funktion dieses Stabes erklärt er, ohne auf die Äquatoriale Sonnenuhr zurück zu greifen [2].

Mit Hilfe eines veränderbaren Modells lässt sich die Analemmatische Sonnenuhr durch physische **Verschiebung** aus der Äquatorialen Sonnenuhr herleiten. Deren Schatten-werfender Punkt findet sich nach der Verschiebung im Schatten-Stab der Analemmatischen Sonnenuhr wieder.

Zur Beschreibung dienen ausschliesslich Fotografien des Modells in seinen verschiedenen Zuständen auf dem Wege von der einen zur anderen Sonnenuhr.



Bild 1 Analemmatische Sonnenuhr in Brou bei Bourg-en-Bresse in Frankreich

2. Verwendung einer Ring-förmigen Äquatorialen Sonnenuhr

Bild 2 zeigt beide Sonnenuhren übereinander angeordnet. Der senkrechte Stab ist der auf der Analemmatischen Sonnenuhr einzustellende Schatten-Werfer. Der geneigte Stab ist zwar auch auf dem horizontalen Zifferblatt befestigt, gehört aber zur Äquatorialen Sonnenuhr und ist ein Polstab. Deren Zifferblatt hat in der Mitte eine kreisförmige Öffnung, an deren Rand der Ziffern-Kreis gezeichnet ist, der allein wichtige Teil in der Anzeige-Ebene der verwendeten Äquatorialen Sonnenuhr. Das ist eine **Ring**-förmige und nicht die Standard-Version der Äquatorialen Sonnenuhr.

Der Ring bzw. Kreis ist nötig, damit bei senkrechter Parallelprojektion auf die horizontale Ebene eine Ellipse entsteht (erste der beiden von *Terpstra* formulierten Konstruktions-Vorschriften, s. Bild 2). In der Analemmatischen Sonnenuhr ist ein Punkt-Schatten wirksam, genau wie bei der Äquatorialen Ring-Sonnenuhr. Es zählt nur der Kreuzungs-Punkt zwischen Stab-Schatten und Ellipse bzw. Kreis.

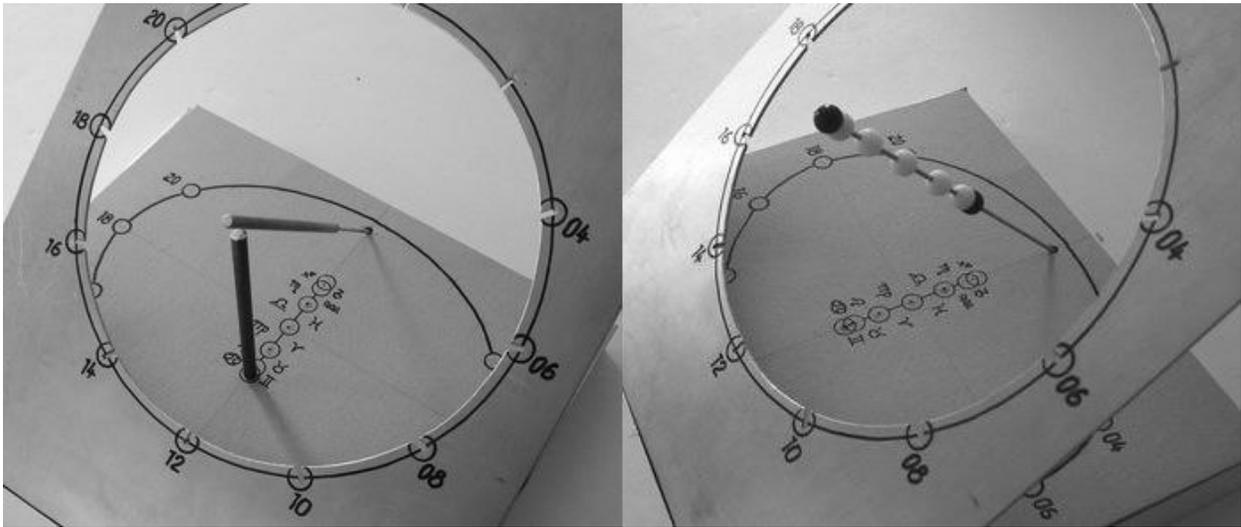


Bild 2: Modell: Ring-förmige Äquator- und Analemmatische Sonnenuhr

Bild 3: Äquatoriale Sonnenuhr: Polstab mit Datums-Skala

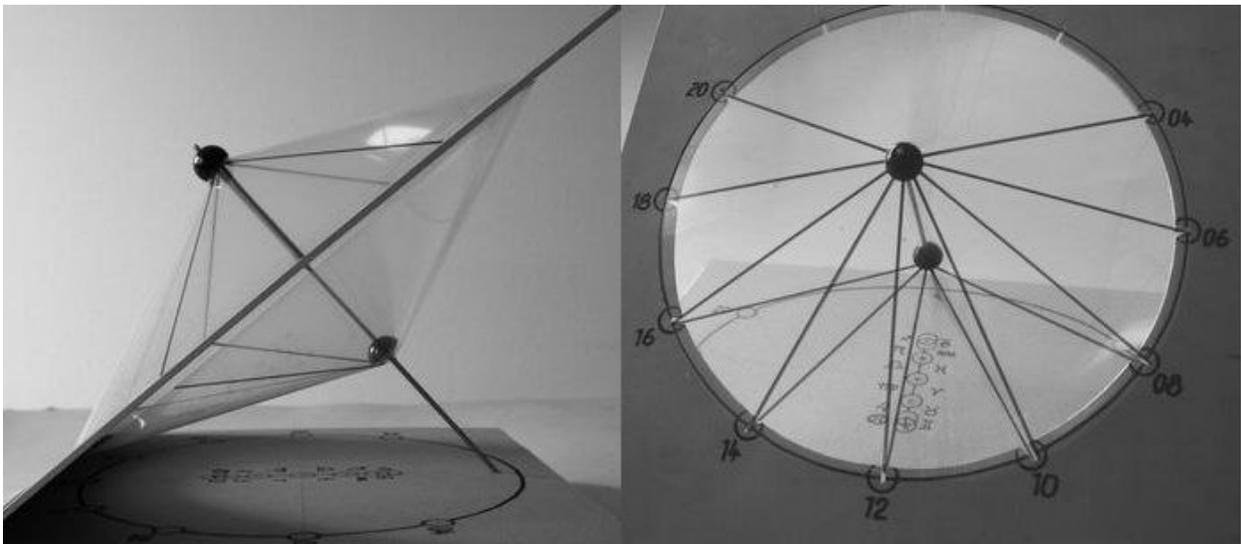


Bild 4: Äquatoriale Sonnenuhr: zwei Schatten-Kegel (Sonnenwend-Tage)

Bild 5: Äquatoriale Sonnenuhr: Schatten-Strahlen an Sonnenwend-Tagen

3. Schatten-Stäbe als gerade Reihen unendlich vieler Schatten-werfender Punkte

Dass in beiden Sonnenuhren je ein Schatten-werfender Stab vorkommt, verwundert also zunächst. Nötig ist doch nur der Schatten von einem (in der Regel nicht fixem) Punkt. Weil aber jeder der beiden Stäbe den in jedem Moment nötigen Punkt enthält (jeder Stab ist die gerade Reihe von unendlich vielen Punkten), können Stäbe verwendet werden. Bei der Äquatorialen Sonnenuhr sind wir letztlich froh über dieses uns zufallende Geschenk.

Für das Verständnis müssen die Stäbe in Punkte aufgelöst werden. Wir beginnen beim Polstab der Analemmatischen Sonnenuhr. In Bild 3 sind von den unendlich vielen – die Sonnen-Deklination ändert sich stetig – Punkte als

kleine Kugeln dargestellt. Von jedem geht der den Kreis treffende Schatten annähernd während eines ganzen Tages aus. Diese Punkte teilen das Jahr in die durch die 12 Tierkreiszeichen gekennzeichneten Abschnitte. Die senkrechte Parallelprojektion der **Polstab-Skala** ist die **Datums-Skala** der Analemmatischen Sonnenuhr (zweite der von *Terpstra* angegebene Konstruktions-Vorschriften, s. Bilder 2 und 3, horizontales Zifferblatt), auf der der senkrechte Schatten-Stab täglich neu zu positionieren ist.

In den Bildern 4 und 5 ist die Schatten-werfende Funktion der beiden Endpunkte der Polstab-Skala gezeigt. Der obere Punkt wirkt bei Sommersonnenwende, der untere bei Wintersonnenwende. Von ihren unendlich vielen Schatten-Strahlen, die pro Tag einen Kegelmantel bilden, ist für jede zweite volle Stunde

einer als Linie auf durchscheinender Folie gezeichnet. Weil das Modell für die geographische Breite $\varphi=49^\circ$ ausgelegt ist, reicht das Linienbündel gerade von Sonnen-Aufgang bis Sonnen-Untergang (Endlinien sind horizontal).

4. Der Begriff Projektion und der Vorgang Verschiebung

Die beiden erwähnten und bekannten Konstruktions-Vorschriften, mit denen eine Analematische Sonnenuhr erstellt werden kann, und die sich auf die Verwandtschaft der Analematischen Sonnenuhr mit einer Äquatorialen Sonnenuhr beziehen, erfüllen den von *Terpstra*

[3]als „einfachen Beweis“ der Analematischen Sonnenuhr formulierten Anspruch nicht ausreichend. Mit dem mathematischen (oder auch optischen) Begriff **Projektion** ist dem Schritt vom Polstab (oder wie bereits präzisiert: von der Polstab-Skala) zum senkrechten Schattenstab (oder zur **Schattenstab-Skala**, siehe später) nicht beizukommen. Er führt nur zu seinem Fuss-Punkt. Für die Behandlung des Stabes als Ganzes erweist sich der Vorgang der **Verschiebung** als geeigneter [4].

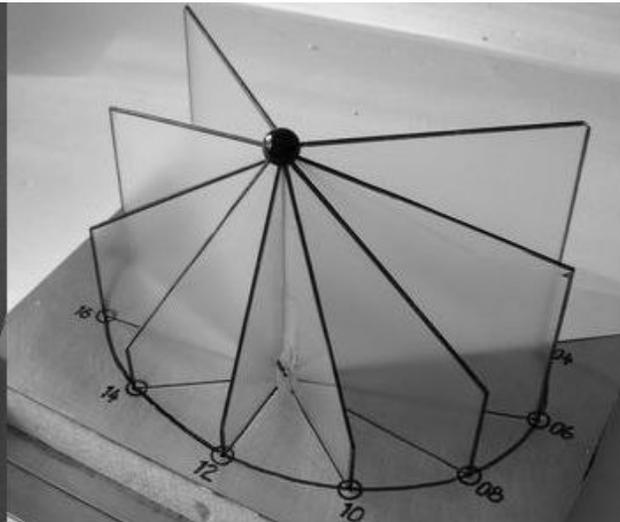
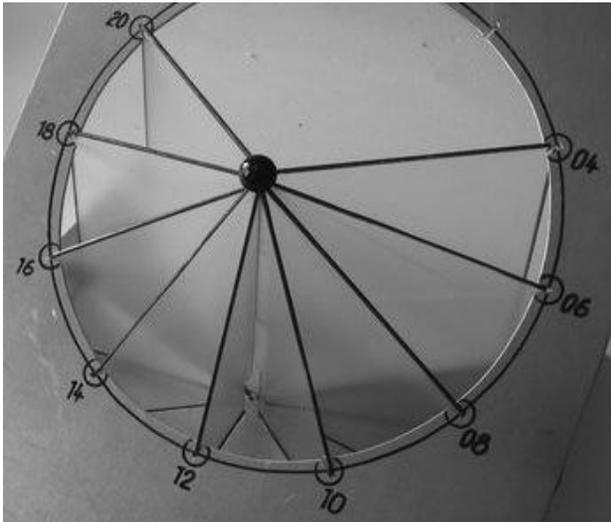


Bild 6: Äquatoriale Sonnenuhr mit Acrylglas-Scheiben zur Sommer-Sonnenwende

Bild 7: Acrylglas-Scheiben zur Sommer-Sonnenwende, eine ÄquatorialeSonnenuhr darstellend

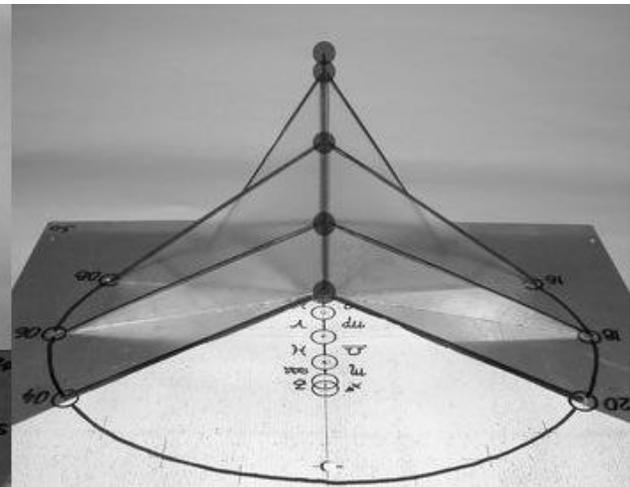
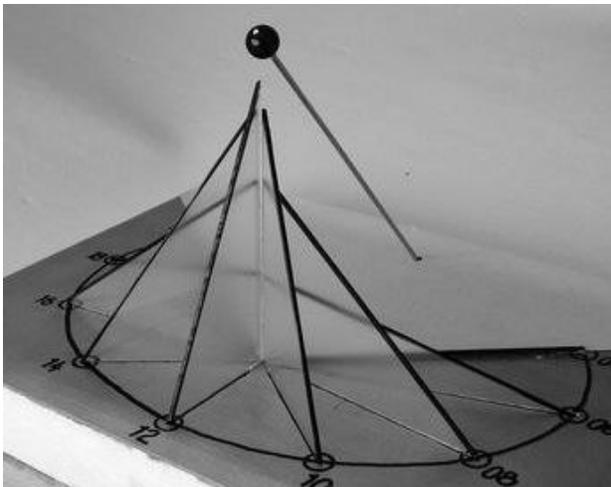


Bild 8: Acrylglas-Scheiben zur Sommer-Sonnenwende, eine Analematische Sonnenuhr darstellend

Bild 9: Acrylglas-Scheiben zur Sommer-Sonnenwende, eine Analematische Sonnenuhr darstellend, Schatten-werfende Punkte markiert

In den Bildern 6 und 7 ist die Situation bei Sommersonnenwende nochmals aufgenommen. Die **Tripel** (Schatten-Werfer + Schatten-Strahl + Punkt-Schatten) werden jetzt durch die oberen Kanten von senkrecht auf dem Zifferblatt der Analematischen Sonnenuhr stehenden Acrylglas-Scheiben simuliert. Das innere Kanten-Ende ist der Schatten-Werfer, das äussere der Punkt-Schatten, die Kante selbst ist der Schatten-Strahl.

In Bild 7 ist der Äquatoriale Ziffern-Kreis entfernt. Die horizontale Analematische Ziffern-Ellipse ist zu sehen. Nun werden die Scheiben parallel und senkrecht nach unten **verschoben** (sie sind in Schlitzfenstern versenkbar), bis die äusseren Kanten-Enden (die Punkt-Schatten) das horizontale Zifferblatt treffen und die Zeit dort anzeigen: Bild 8. Die inneren Kanten-Enden (die Schatten-werfenden Punkte) bilden nun nicht mehr einen gemeinsamen Punkt, sondern sie befinden sich alle in verschiedener Höhe (Ausnahme Vor-/Nachmittags-Symmetrie) auf einer Geraden senkrecht unter dem Ausgangspunkt: Bilder 8 und 9. Das Tageszeit-abhängige Absenk-Mass ist in Bild 7 als überstehende Länge der äusseren Plattenkanten erkennbar. Am Mittag ist es minimal, bei Sonnen-Aufgang und Sonnen-Untergang (nach Absenken ist die Oberkante hier Zifferblatt-bündig) maximal.

Nur ein Stück des Tripels, nämlich der Schatten-Punkt endet sowohl durch Projektion als auch durch Verschiebung in der Projektions-Fläche, hier im Analematischen Zifferblatt. Die beiden anderen Stücke – Schatten-werfender Punkt und sein Schatten-Strahl – verbleiben nach der Verschiebung im Raum. (Die Ausnahme gilt bei Sonnenauf- und -untergang, wenn alle Teile des Tripels in der horizontalen Ebene ankommen.) Der Schatten-werfende

Punkt ist zu einem Punkt der Datums-Skala – gleich wie bei Projektion – geworden. In Bild 9 sind die alle zwei Stunden wirksamen Schatten-werfenden Punkte markiert. Ihre Verbindung zu einem Stab ist der ihre Stelle in Bild 2 einnehmende Schatten-Stab. Die Auflösung des Schattenstabs in Punkte ist die oben angekündigte **Schattenstab-Skala**. Über den Tag sind unendlich viele Punkte wirksam. Der jeweils gültige ist der, dessen Schatten auf die Skalen-Ellipse fällt (Kreuzungs-Punkt zwischen Stab-Schatten und Ellipse). Die Schattenstab-Skala spielt bei der Benutzung der Analematischen Sonnenuhr keine Rolle, sie ist aber für deren Verständnis sehr nützlich. Die Datums-Skala auf der Analematischen Sonnenuhr ist hingegen täglich zu beachten, leider.

Nachdem der Schatten-werfende Punkt an variable Stelle des Schatten-Stabes verschoben wurde, so dass sein Schatten die in die Ellipse verschobene Ziffer trifft, ist die Aufgabe erfüllt. Schatten-Strahlen müssen nur im Modell verschoben werden. In realen Sonnenuhren wirkt paralleles Sonnen-Licht. Also sind dort zueinander parallele Strahlen-Paare vorhanden.

In den Bildern 10 bis 13 ist der bei Winter-sonnenwende wiederholte Verschiebe-Vorgang gezeigt. Er ist analog zu dem bei Sommersonnenwende (Bilder 6 bis 9). Zwischen beiden Sonnenwenden ändert sich die Sonnen-Deklination δ täglich, so dass an jedem Tage eine andere Schattenstab-Skala gilt. Diese Skala wird im folgenden Abschnitt hergeleitet, der als fakultativer Anhang deklariert ist, damit das Vorhaben, sich im Hauptteil nur auf Fotografien zu stützen, nicht unterlaufen wird.

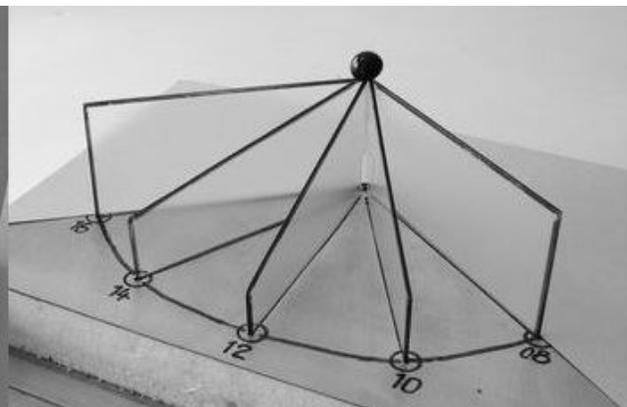
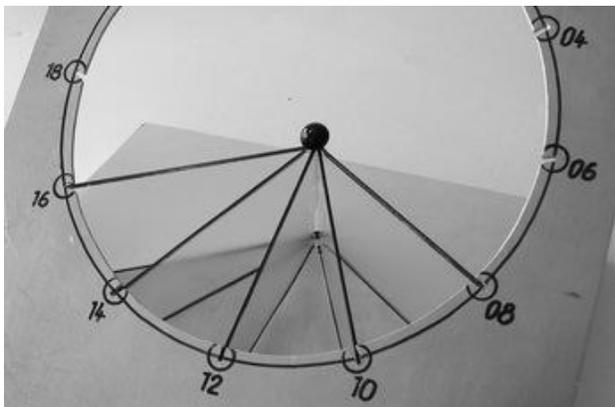


Bild 10: Äquatoriale Sonnenuhr mit Acrylglas-Scheiben zur Winter-Sonnenwende

Bild 11: Acrylglas-Scheiben zur Winter-Sonnenwende, eine Äquatoriale Sonnenuhr darstellend

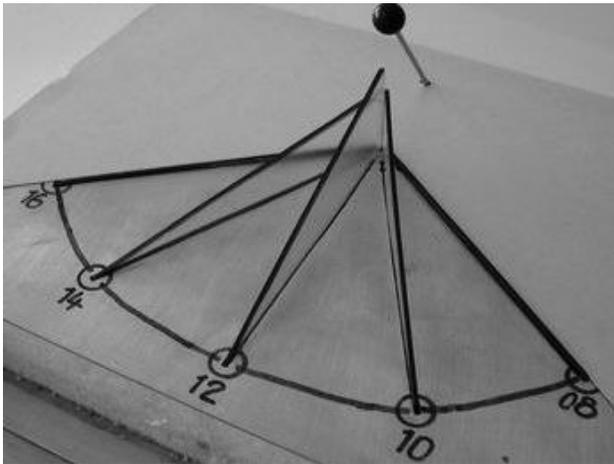
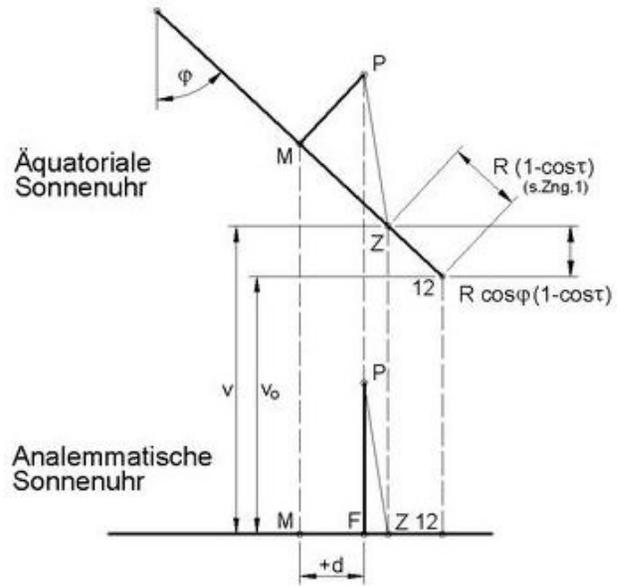
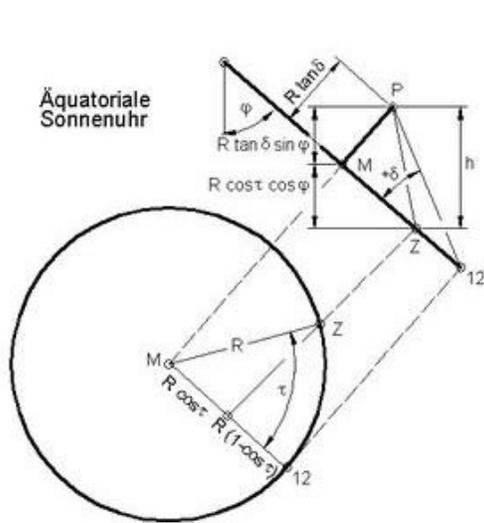


Bild 12: Acrylglas-Scheiben zur Winter-Sonnenwende, eine Analemmatische Sonnenuhr darstellend
 Bild 13: Acrylglas-Scheiben zur Winter-Sonnenwende, eine Analemmatische Sonnenuhr darstellend, Schatten-werfende Punkte markiert



Zeichnung 1: Höhe des Schatten-werfenden Punktes über dem Zifferblatt, hier bei der Äquatorialen Sonnenuhr

Zeichnung 2: Verschiebung im Modell von der Äquatorialen zur Analemmatischen Sonnenuhr

5. Anhang: Gleichungen der Schattenstab-Skala und der Verschiebung

Die Schattenstab-Skala ist die Höhe h des Schatten-werfenden Punktes P über dem Stab-Fusspunkt F auf dem Analemmatischen Zifferblatt (s.Zng.2). Diese Höhe ist gleich gross wie die vertikale Distanz des Schatten-werfenden Punktes von der Stundenziffer Z in beiden Sonnenuhren. Im Modell ist es die Steigung der oberen Kanten der Scheiben. Geräte-Konstante ist der Radius R des Äquatorialen Ziffernkreises (gleicher Wert wie grosse Halbachse der Analemmatischen Ziffern-Ellipse). Die astronomischen Variablen sind der Deklinations-

winkel δ und der Stundenwinkel τ der Sonne. Ortsvariable ist die geografische Breite φ .

Schattenstab-Skala:

$$h = R (\cos \tau \cos \varphi + \tan \delta \sin \varphi) \quad (\text{s.Zng.1}).$$

Man beachte, dass diese Skala im Vergleich mit der Daten-Skala d auch eine Funktion der Tageszeit (Stundenwinkel τ) ist. Letztere lautet: $d = R \tan \delta \cos \varphi$ [2].

Die Höhe ist maximal (Stab-Mindesthöhe) bei $\delta_{\max} = +23.45^\circ$ (Sommersonnenwende) und $\tau = 0^\circ$ (Mittag) und beträgt $h_{\max} = R (\cos \varphi + 0.434 \sin \varphi)$.

Am Ort $\varphi = 49^\circ$ muss der Stab mindestens $0.9834 R$ lang sein.

Bei Sonnenauf- und -untergang geht der Schatten vom Fuss-Punkt F des Stabes aus:

$$h = 0 = R (\cos\tau\cos\varphi + \tan\delta\sin\varphi),$$

womit sich die Sonnenauf- bzw. Sonnenuntergangszeit angeben lässt:

$$\cos\tau_{SA/SU} = -\tan\delta\sin\varphi/\cos\varphi = -\tan\delta\tan\varphi.$$

Bei Sommersonnenwende am Ort $\varphi = 49^\circ$ ist $\tau_{SA/SU} = \pm 120^\circ$.

Als Zugabe sei noch die Verschiebung v aus der Äquatorialen in die Analematische Lage angegeben. Sie ist die Summe der Modell-Konstanten v_0 und der Höhe der Äquatorialen Stundenziffer Z über der 12 (siehe Zng.2). Im Modell sind es die überstehenden Längen der vertikalen Aussenkanten der Scheiben.

Verschiebung:

$$v = v_0 + R\cos\varphi(1-\cos\tau) \quad (\text{s.Zng.2}).$$

Die maximale Verschiebung ist für Sonnenauf- und -untergang bei Sommersonnenwende vorzunehmen:

$$v_{\max} = v_0 + R\cos\varphi(1-\cos 120^\circ).$$

Am Ort $\varphi = 49^\circ$ beträgt dieser Maximalwert:

$$v_{\max} = v_0 + 1,5R\cos 49^\circ = v_0 + 0.984 R.$$

6. Literatur

- [1] M. de Vaulezard „Traité de l'origine, démonstration, construction et l'usage de cadran analemmatique“ Paris, 1644
- [2] P.Terpstra: „Zonnewijzers“, Groningen, 1953
- [3] P.Terpstra: “Een eenvoudig bewijs voor de gnomonzonnewijzer van Brou“, Groningen, 1951
- [4] S.Wetzel: “Sonnenuhren mit zusätzlicher Weltkarte auf dem Zifferblatt“, Schriften der Freunde alter Uhren, 1998

Januar 2008

Siegfried Wetzel, CH 3400 Burgdorf

s.Wet@gmx.net