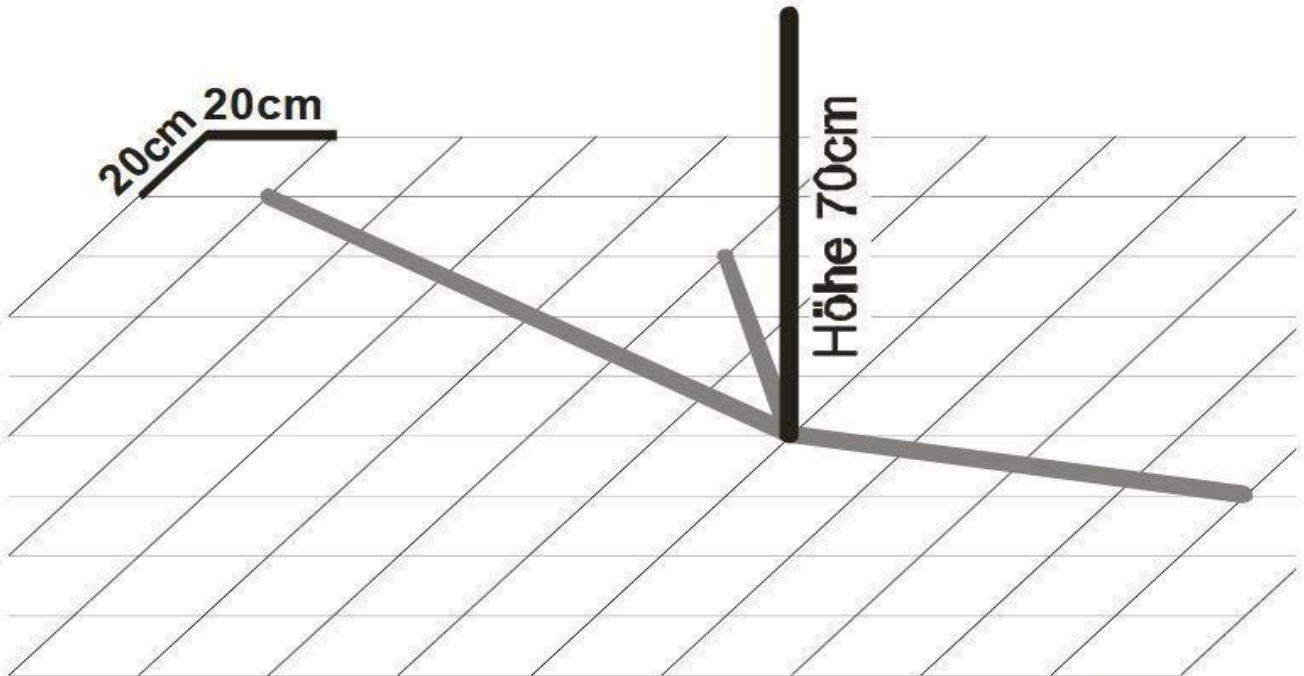


DGC-Aufgabe 2026

Bestimmung der Südrichtung

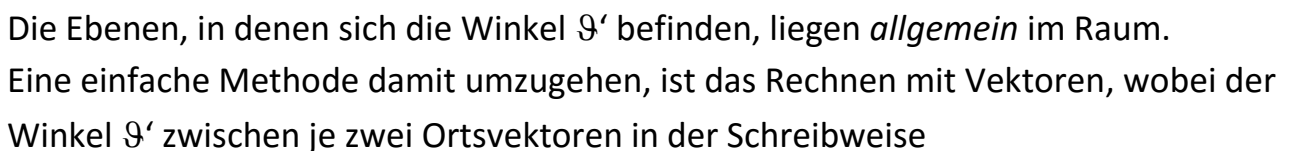


Der horizontale Boden einer Terrasse ist mit quadratischen Platten der Größe 20 cm x 20 cm fugenlos belegt. Im Laufe eines Tages werden drei Schatten eines orthogonalen Stabes von 70 cm Höhe markiert. Wenn wir annehmen, dass sich die Deklination der Sonne dabei nicht geändert hat, wo ist dann Süden?

Die Enden der drei Stabschatten liegen auf einer sogenannten *Tagesbahn* (Deklination ϑ der Sonne = const, Bahnform = Hyperbel). Deren Symmetrieachse (*Hauptachse a*) verläuft durch den Fußpunkt des Schattenstabes und weiter in Richtung Süden. Diese Hyperbel ist ein Schnitt durch den Mantel desjenigen Kegels, in dem sich die von der Stabspitze zu den Punkten A bis C führenden Sonnenstrahlen befinden. Um die Südrichtung angeben zu können, genügt es bereits, die Achse (Lage und Richtung) dieses Kegels (*Himmelsachse*, Erdachsparellele, *Polstab* eines bestimmten Sonnenuhrentyps) zu bestimmen, denn sie befindet sich in der *Meridianebene* (Kreis, der durch die Himmelspole und den Zenit dieses Ortes verläuft.)

Die bestimmenden Sonnenstrahlen haben zwischen sich und der Himmelsachse je den Winkel $\vartheta' (= 90^\circ - \vartheta)$. Somit sind 3 Ausdrücke für die Bestimmung der Richtung der Himmelsachse gegeben. Die von der Stabspitze (Zentrum eines kartesischen Koordinatensystems) zu den Punkten A bis C führenden Strahlen werden als Ortsvektoren behandelt. Die z-Achse ist der verlängerte Schattenstab, und x- und y-Achse sind Parallelen zu den Plattenfugen am Boden.

Punkt /Kord.	x	y	z
A	8	-2	-7
B	-4	6	-7
C	-12	8	-7
H	x	y	-7



$$\vec{c} \cdot \vec{h} = |\vec{c}| \cdot |\vec{h}| \cdot \cos \delta'$$

des *Skalarproduktes* erscheint.

Die Ortsvektoren von der Stabspitze zu den Punkten A bis C und zum Fußpunkt H der Himmelsachse (Polstab) sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} +8 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ +6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ +8 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt H ist die zu ermittelnde Größe. Dass seine z-Komponente mit -7 bereits bekannt ist, kann vorerst unberücksichtigt bleiben.

Die rechte Seite der Skalarproduktausdrücke ist für das weitere Vorgehen vorteilhaft einheitlich, wenn die Längen

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \text{ und } |\vec{c}|$$

entfallen bzw. je durch 1 ersetzt werden. Das ist möglich durch *Normieren* der zugehörigen Ortsvektoren, wobei diese je auf die Länge 1 durch Dividieren ihrer Komponenten durch die ursprüngliche Länge umgewandelt werden. Die ursprünglichen Längen sind

$$|\vec{a}| = \sqrt{117} \quad |\vec{b}| = \sqrt{101} \quad |\vec{c}| = \sqrt{257}$$

Die normierten Vektoren lauten

$$\vec{a_n} = \begin{pmatrix} +8/\sqrt{117} \\ -2/\sqrt{117} \\ -7/\sqrt{117} \end{pmatrix} \quad \vec{b_n} = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{101} \\ +6/\sqrt{101} \\ -7/\sqrt{101} \end{pmatrix} \quad \vec{c_n} = \begin{pmatrix} -12/\sqrt{257} \\ +8/\sqrt{257} \\ -7/\sqrt{257} \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt H ist in allen drei Skalarproduktausdrücken enthalten, weshalb er unnormiert bleiben kann. Seine Ausgangslänge wird mit $\cos\vartheta'$ zum Parameter p zusammengefasst.

$$p = \cos\vartheta' \cdot |\vec{h}|$$

Die derart behandelten und umgeformten Skalarproduktausdrücke lauten

$$\begin{pmatrix} +8/\sqrt{117} \\ -2/\sqrt{117} \\ -7/\sqrt{117} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \quad \begin{pmatrix} -4/\sqrt{101} \\ +6/\sqrt{101} \\ -7/\sqrt{101} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \quad \begin{pmatrix} -12/\sqrt{257} \\ +8/\sqrt{257} \\ -7/\sqrt{257} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems (mit <https://www.matrixcalc.org/de/slu.html>) in Abhängigkeit vom Parameter p für die Koordinaten des Ortsvektors zum Punkt H lautet:

$$x = -1,235 \cdot p$$

$$y = -1,948 \cdot p$$

$$z = -2,400 \cdot p$$

Die Südrichtung ergibt sich aus $\arctan(x/y) = 32,4^\circ$. Um diesen Winkelwert ist das Plattenmuster im Gegenuhrzeigersinn aus der Südrichtung verdreht.

Mit dem bekannten absoluten Wert $z = -7$ (Stabhöhe) wird $p = 7/2,4 = 2,917$.

Die beiden anderen Koordinaten dieses Vektors sind somit absolut

$x = -3,602$ und $y = -5,682$.

Zugaben

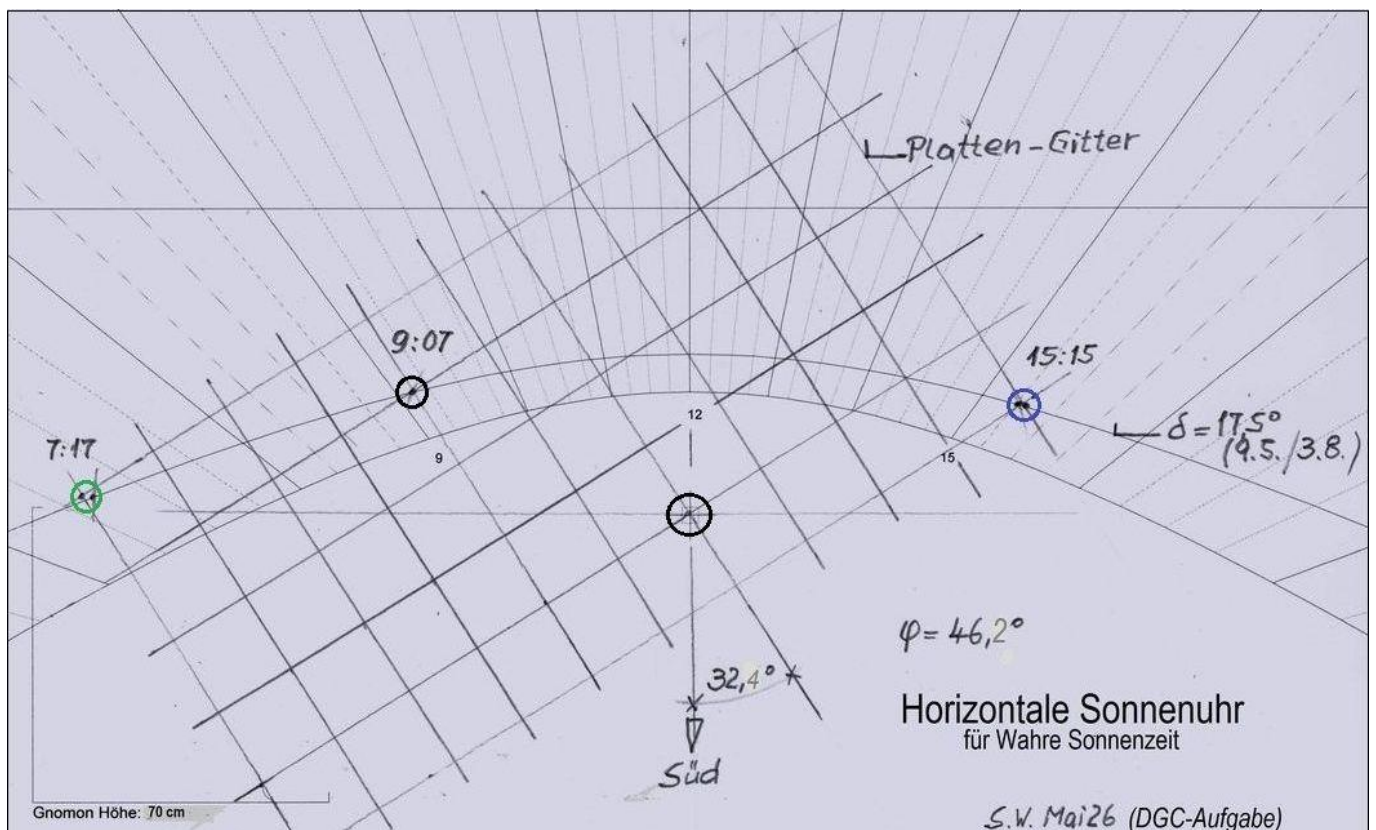
Die geographische Breite φ am Ort der Sonnenuhr ist der Winkel zwischen der horizontalen Ebene und dem Polstab. Dessen Fußpunkt ist $\sqrt{x^2 + y^2} = 6,720$ dm vom 7 dm hohen Schattenstab entfernt. >>> $\varphi = \arctan(7/6,72) = 46,2^\circ$.

Zur Berechnung des Winkels ϑ' wird die Länge des Vektors zum Punkt H (Länge des Polstabes) benötigt. Diese ist $p \cdot \sqrt{1,235^2 + 1,948^2 + 2,4x^2} = 9,701$ dm.

$\cos \vartheta' = p / 9,704 \gg \vartheta' = 72,52^\circ \gg \vartheta = 90^\circ - \vartheta' = 17,48^\circ$

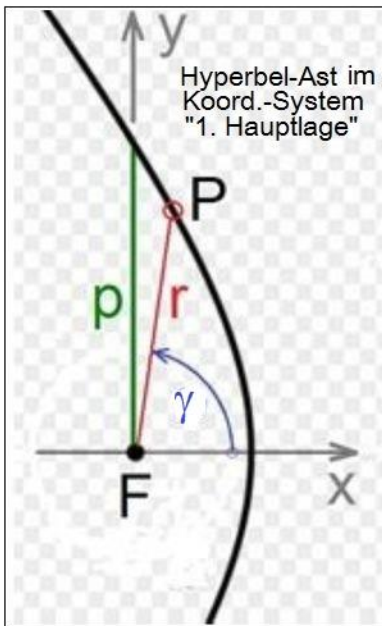
Die Sonnendeklination hatte am Tage der Beobachtung den Wert $\vartheta = +17,5^\circ$.

Im folgenden Bild ist dem Plattenboden mit Schattenstab eine mit dem Konstruktionsprogramm „Sonne“ von *Helmut Sonderegger* erstellte horizontale Sonnenuhr überlagert. Auf dieser sind die den Punkten A bis C entsprechenden **Tageszeiten** (Wahre Sonnenzeit) eingetragen.



Nachtrag 1

Herleiten der Polargleichung der Hyperbel, auf der die drei Schattenenden liegen



Die von den äußeren Enden der drei Schatten als Hyperbel gebildete Tageskurve kann u.a. auch mit einer *Polargleichung* beschrieben werden:

$$(1) \quad r = p / (1 + \varepsilon \cdot \cos(\gamma)) \quad (\text{s. Abb. links})$$

Der Pol befindet sich im Brennpunkt **F** des zu zeichnenden Hyperbel-Astes.

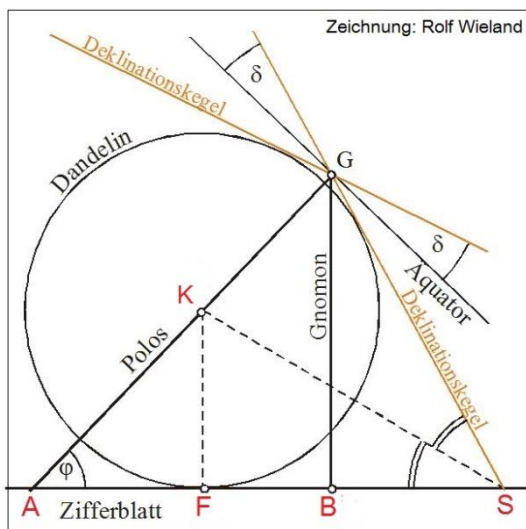
r ist die Strecke zwischen einem Punkt **P** auf diesem Ast und dem zugehörigen Brennpunkt.

p ist der sogenannte *Halbparameter*.

ε ist die *numerische Exzentrizität* ($\varepsilon > 1$ bei Hyperbel n).

Um diese Gleichung anwenden zu können, muss sich die Hyperbel in einer *Normallage* (oder *Hauptlage*) im verwendeten Koordinatensystem befinden, z.B. in der *1. Hauptlage* (beide Brennpunkte liegen auf der x-Achse), wie im Bild oben. Das bisher verwendete, den Bodenplattenkanten folgende und das benötigte Koordinatensystem sind gegeneinander verdreht, und ihre Ursprünge (einerseits der Fußpunkt des Schattenstabes, andererseits der Hyperbel-Brennpunkt) decken sich nicht. Es ist eine Koordinatentransformation in zwei Schritten vorzunehmen:

1. Drehen des KSs im Fußpunkt des Stabes und neue Koordinatenwerte bestimmen
(Drehwinkel = $90^\circ - 32,4^\circ$ im Gegenuhrzeigersinn, x-Koordinate bleibt horizontal im Bild)
2. Verschieben des KSs auf neuer x-Achse zum Brennpunkt und neue Koordinatenwerte bestimmen.

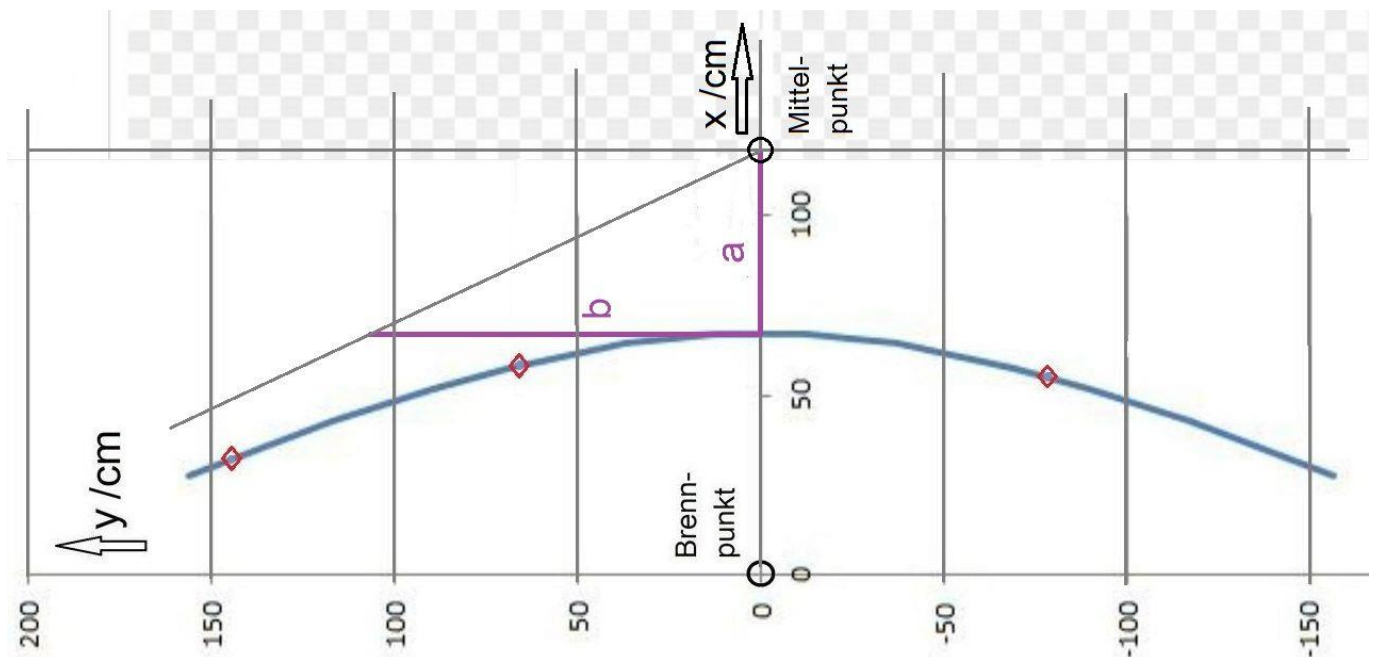


Das Maß der Verschiebung zwischen Fußpunkt B und Brennpunkt F wird mithilfe einer *Dandelinischen Kugel* bestimmt (Abb. links).

Diese liegt im Deklinationskegel innen und auf der Kegelschnitt-Ebene (Zifferblatt) im Brennpunkt der Schnittkurve (Hyperbel) an.

Mit Gnomon-/Stabhöhe (70 cm), $\varphi = 46,1^\circ$ und $\theta = 17,5^\circ$ ergibt die Rechnung: **28,94 cm**.

Mit den transformierten Lagedaten von zwei der drei vorgegebenen Schattenpunkte findet man die Parameter p und ε der Gl. (1): $p = 222,21 \text{ cm}$ $\varepsilon = 2,31$.
Die gesuchte Tageskurve lässt sich nun zeichnen (s. folgende Abb.)



Hyperbel-Kenngrößen a und b:

Ihre Abhängigkeiten von p und ε : $p = \frac{b^2}{a}$ $\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2} / a$

Mit $p = 222,2 \text{ cm}$ und $\varepsilon = 2,31$ folgt **$a = 51,5 \text{ cm}$** **$b = 106,9 \text{ cm}$**

Anmerkungen:

1. Alle Rechenschritte lassen sich im Ausgabeblatt der Excel-Arbeit (zurück zur Hauptseite) verfolgen.
2. Da mit Excel Kurven nur aus Scharen von Punkten erstellt werden können, die mit x-y-Koordinaten codiert sind, mussten die polar (ε und r) codierten Punkte in kartesisch codierte Punkte zurückverwandelt werden.

Juli 2026 Siegfried Wetzel

Nachtrag 2

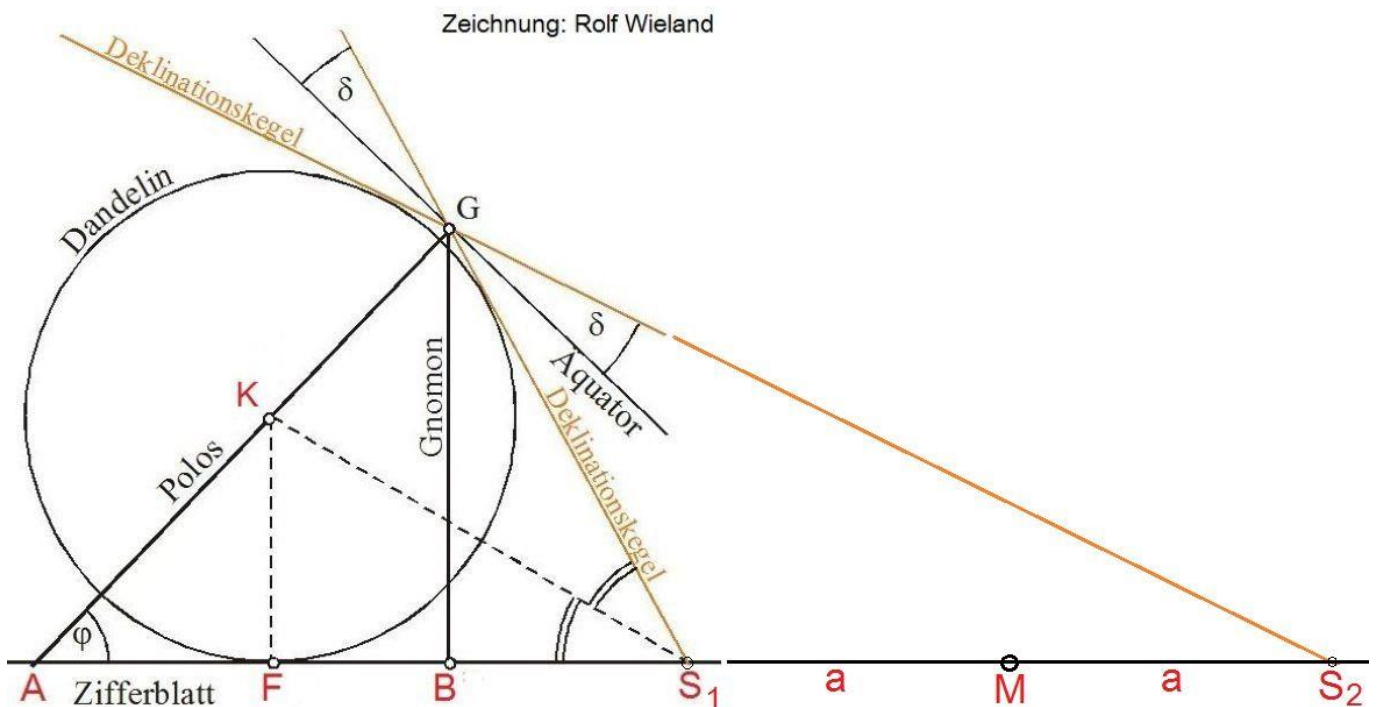
Die Abschnitts-Gleichung der Hyperbel, auf der die drei Schattenenden liegen

Die am häufigsten gebrauchte Hyperbel-Gleichung in *Normalform* ist die

Abschnittsgleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a und b sind die sogenannten Halbachsen der Hyperbel (s. Bild auf vorheriger Seite, M = Koordinatenursprung). Ihre Größen sind im Nachtrag 1 berechnet worden, sodass die

Gleichung schon hingeschrieben werden kann: $\frac{x^2}{51,5^2} - \frac{y^2}{106,9^2} = 1$.



Die bereits im 1. Nachtrag verwendete maßgetreue Zeichnung mit *Dandelin*ischer Kugel enthält nach rechts bis zum Scheitel des zweiten Hyperbel-Astes verlängert alle Punkte auf der x-Achse der Hyperbel, also auch die Halbachse $a = \overline{SM}$, deren Länge mit ein paar trigonometr.n Rechnungen ebenso wie die Distanz $\overline{BF}$ ermittelbar ist : $a = 51,5 \text{ cm}$. Für die Exzentrizität $e = \overline{MF}$ wird der Wert 118,2 cm errechnet. Mittels $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird für b der Wert 106,9 cm berechnet.

Résumé: Schon mit den ganz früh (Juni 2026) ermittelten Werten für φ und ϑ und mit der Gnomon-/Stabhöhe kann eine - die drei Schattenendpunkte enthaltende - Gleichung (hier die Abschnitts-Gleichung) mit relativ einfachen Rechnungen bestimmt werden.

Eine Variante zum Vorgehen mit vollständiger Koordinatentransformation ist, auf die Bestimmung der Verschiebung zu verzichten und diese als dritte Unbekannte bzw. als x_0 (1.Hauptlage) oder y_0 (2.Hauptlage) in einem Gleichungssystem mit drei Unbekannten zu behandeln. Konnte man im Nachtrag 1 mit den Koordinaten von bereits zwei der drei Schattenendpunkte auskommen, so werden jetzt alle drei Koordinatenpaare benötigt.

Das Vorgehen:

Bleibt das Koordinatensystem um den Betrag x_0 aus dem Hyperbel-Mittelpunkt verschoben, so lautet der *Abschnittsgleichung*

$$(x-x_0)^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

Mit den 3 Koordinatenpaaren existieren somit 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten : x_0 , a und b .

Die Gleichungen lauten:

$$(x_1-x_0)^2/a^2 - y_1^2/b^2 = 1$$

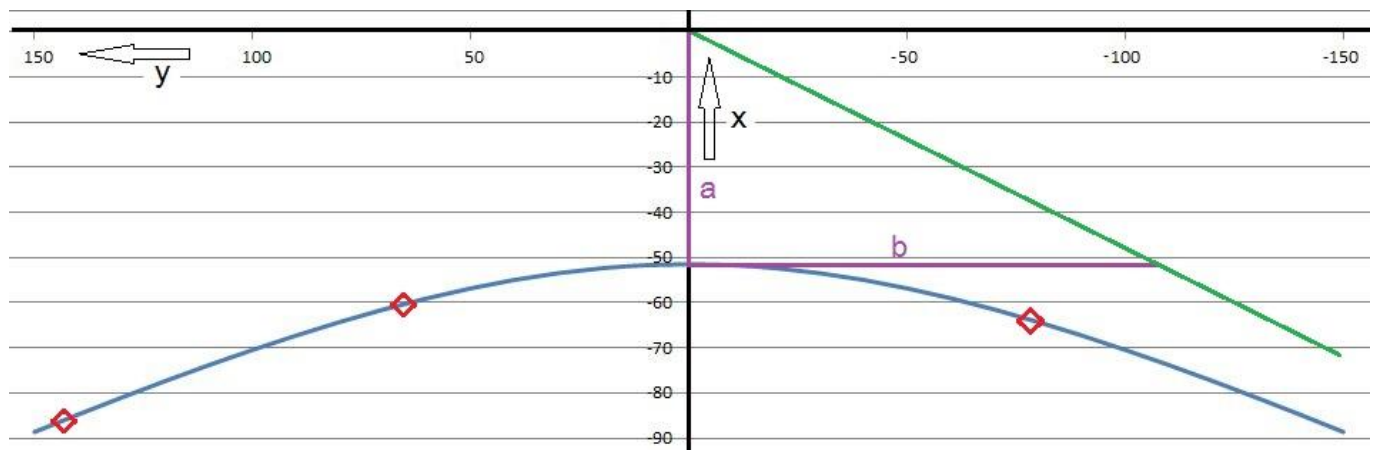
$$(x_2-x_0)^2/a^2 - y_2^2/b^2 = 1$$

$$(x_3-x_0)^2/a^2 - y_3^2/b^2 = 1$$

Die Lösungen sind:

$$x_0 = 89,7 \text{ cm}, \quad a = 51,5 \text{ cm}, \quad b = 106,9 \text{ cm}$$

Die Gleichungen sind nichtlinear. Die Lösung war deshalb etwas schwieriger als beim im Juni gelöstem Gleichungssystem (ich ließ mir helfen von *OnlineMathe.de*).



Zusammenfassung

Über die verlangte Bestimmung der Südrichtung hinaus machte ich schon am Anfang Zugaben. Diese regten dazu an, die der Aufgabe innewohnende Hyperbel zu zeichnen.

Dass ich die dafür nötige Hyperbelgleichung nicht nur auf einem, sondern auf mehreren Wegen herleitete, entsprang dem inzwischen angefachten Interesse, noch weitere Kenntnisse von Kegelschnitten zu erwerben.